

Asa.

o.

110 m

Atstr.

^o
110 m

Leinwand

Neue exacte Methode
für die
Bahnbestimmung der Planeten und Kometen
nebst einer neuen Störungstheorie.

Von

M. Vodušek,

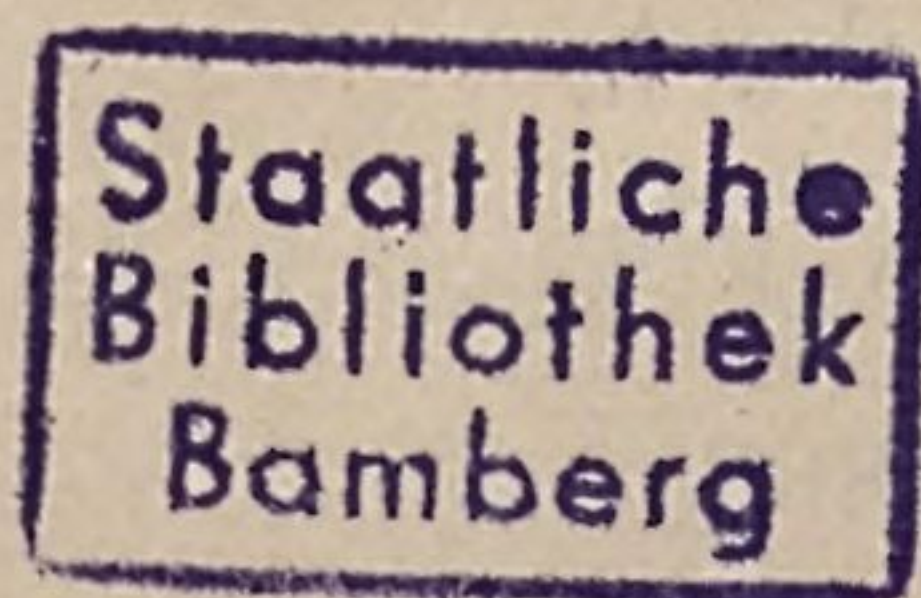
Professor am k. k. Gymnasium in Laibach.

Laibach.

Druck und Verlag von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1883.

Alle Rechte vorbehalten.



Vorrede.

In diesem Werke, welches ihn durch beinahe drei Jahre in seinen freien Stunden fast ausschliesslich beschäftigte, bringt der Verfasser eine durchaus neue, und zwar richtige Lösung des ziemlich schwierigen Problems der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen; er nennt diese seine Methode exact, weil sie auf so einfacher und solider Grundlage ruht, dass sie ernstlich wohl nie angefochten in der Reihe der bereits feststehenden Wahrheiten ein weiteres Glied bilden wird. Im allgemeinen genüge zu sagen, dass nicht allein die Auflösung der sogenannten Fundamentalgleichungen, die der Centralbewegung überhaupt eigen sind, sondern auch die Bestimmung der darin vorkommenden Dreieckverhältnisse sowohl bei Planeten als auch bei Kometen eine sehr einfache und elegante Gestalt angenommen hat, und in dieser richtigen Bestimmung der Dreieckverhältnisse liegt hauptsächlich der Fortschritt zu den bisherigen Methoden, bei denen sich zwischen Beobachtung und Rechnung bekanntlich immer ein unerquicklicher Unterschied herausstellte und auch herausstellen musste. Die Zulässigkeit der Kreishypothese bei Planeten und der Parabelhypothese bei Kometen erscheint durch einen kleinen Kunstgriff der Restbestimmung bei convergenten Reihen hinlänglich begründet.

Was man bei den bisherigen im grossen und ganzen von Gauss herrührenden Methoden schwer vermisst hat, war eine strenge Controle der Beobachtungen selbst, ob sie nämlich unter einander stimmen oder nicht; denn ohne eine solche rechnet man auf gut Glück und weiss am Ende nicht, wie viel Zutrauen man den berechneten Bahnelementen schenken darf. Der Verfasser hat diesem Uebelstande abgeholfen und eine Controle geschaffen, deren Schärfe die Beob-

achtungen oft kaum vertragen werden; dafür fallen die Methode der kleinsten Quadrate, Variation der Constanten u. s. w. als überflüssige Surrogate hier ganz weg, denn es ist einleuchtend, dass eine aus wenigen guten Beobachtungen vermittelt einer richtigen Methode durchgeführte Bahnbestimmung mehr leisten muss, als alle anderen secundären Hilfsmittel zusammengenommen, wenn ihnen die richtige Basis fehlt.

Gegenüber den beträchtlichen Schwankungen, die den bisherigen Methoden anhaften, war der Verfasser bemüht, eine sichere Führung in alle Stadien der Rechnung zu bringen; wie weit ihm dies gelungen ist, mag der geneigte Leser selbst beurtheilen.

An die Stelle des von Olbers angegebenen Verhältnisses zwischen zwei Distanzen eines Kometen von der Erde tritt hier ein anderes, der Wahrheit bedeutend näher kommendes ein.

Der fünfte Abschnitt behandelt den speciellen Fall der Erd- und Mondbahnellipse. So sehr nun auch diese beiden Bahnen von Leverrier, Hansen u. a. genau erforscht sind, die bisher angenommenen Elemente derselben werden auf Grund der hier entwickelten Methode einer Verbesserung fähig sein, wie es denn auch hinlänglich bekannt ist, dass die von Hansen aufgestellten Mondbahnelemente, die besten, die wir besitzen, noch etwas zu wünschen übrig lassen; aber auch die Leverrier'schen Sonnentafeln werden gewiss noch einer Vervollkommnung bedürfen.

Der sechste Abschnitt endlich beschäftigt sich mit den Störungen, dem sogenannten Problem der drei Körper; es ist dies eine seit Newton her oft versuchte, aber trotz der Bemühungen der bedeutendsten Mathematiker noch immer nicht in befriedigender Weise gelöste Aufgabe. Von den Principien der Infinitesimal-Rechnung ausgehend, greift der Verfasser das Problem von zwei Seiten an und entwickelt so die Störungen nicht nur in den Elementen der Bahn, sondern auch in den verschiedenen Coordinaten eines einzelnen Ortes; dabei kommt er auf eine merkwürdige, seines Wissens neue, aber hinlänglich motivierte Integrationsmethode. Die mechanischen Quadraturen, auf die man überall geführt wird, verursachen keine allzugrosse Mühe. Die einfache und stets durchsichtige Ableitung der betreffenden Formeln verleiht der hier aufgestellten Störungstheorie das Gepräge der inneren Wahrheit.

Es gereicht dem Verfasser zu besonderer Freude, dass dieses sein Werkchen das Licht der Welt erblickt in einem Jahre, in welchem Krain seine 600jährige Angehörigkeit zum Hause Habsburg feiert; er legt es daher an den Altar des Landes hinzu zu den Gaben, welche dasselbe dem hohen Herrscherhause bringt. In Anbetracht dessen, dass diese Schrift einen bedeutenden Fortschritt in der Astronomie, «der Königin der Wissenschaften», bezeichnen soll, wird ihm diese ideelle Widmung nicht für übel genommen werden.

Laibach, im Juni 1883.

Der Verfasser.



Inhaltsangabe.

	Seite
I. Abschnitt. Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes	1
1. Sphärische Beziehungen. — 2. Rechtwinklige Coordinaten; Verwandlung der heliocentrischen Länge und Breite in geocentrische, und umgekehrt; Verwandlung der Distanzen. — 3. Die rechtwinkligen Coordinaten, ausgedrückt durch die polaren. — 4. Präcession.	
II. Abschnitt. Newtons und Keplers Gesetze. Berechnung eines einzelnen Ortes aus bekannten Elementen	14
1. Der doppelte Ausdruck für das Sectorelement. — 2. Gleichung der Ebene. — 3. Gesetze der Bewegung, Newtons Principien. — 4. bis 7. Keplers Gesetze. — 8. Berechnung der wahren Anomalie. — 9. Berechnung des heliocentrischen und geocentrischen Ortes. — 10. Bahnelemente. — 11. Verwandlung der Länge und Breite in Rectascension und Declination. — 12. Die Berechnung verglichen mit der Beobachtung; Parallaxe.	
III. Abschnitt. Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen	45
1. Correctionen, die man an die Beobachtungen anzubringen hat. — 2. Die Gleichung der Bahnebene, ausgedrückt durch die verschiedenen Coordinaten dreier Orte; die Projectionsdreiecke der drei Coordinatenebenen; Ableitung der drei Fundamentalgleichungen. — 3. Auflösung der drei Fundamentalgleichungen. — 4. Discussion der gefundenen Ausdrücke für ρ , ρ' , ρ'' . — 5. Drehung der Coordinatenachsen; Wahl einer beliebigen Fundamentelebene. — 6. und 7. Bestimmung der Dreieckverhältnisse $n : n' : n''$ bei Planeten. — 8. Berechnung der Elemente einer Planetenbahn. — 9. Beispiel (Ceres). — 10. Bestimmung der Dreieckverhältnisse $n : n' : n''$ bei Kometen. — 11. Berechnung der Elemente einer Kometenbahn. — 12. Beispiel (Komet I., 1847). — 13. Die Kometenbahnen sind ausnahmslos Ellipsen; Schweifbildung bei Kometen.	
IV. Abschnitt. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen	123
Auflösung der Fundamentalgleichungen; Bildung der Dreieckverhältnisse; Beispiel (Vesta); zweite Form der Finalgleichungen; Brauchbarkeit dieser Methode für Kometenbahnen.	
V. Abschnitt. Die Ellipse der Erd- und Mondbahn	136
VI. Abschnitt. Störungen (Problem der drei Körper)	141
1. Ableitung der Störungsgleichung. — 2. Störungen in den Bahnelementen. — 3. Störungen in den Coordinaten eines einzelnen Ortes.	

Berichtigungen.

Seite 28, Zeile 11 von oben lies $c^2 = k^2(1 + m)p$

» 30, » 4 » unten » $k = \frac{\mu a^{3/2}}{\sqrt{1 + m}}$

» 64, » 3 » » » $\sin(A'' - K') \operatorname{tg} J' = \operatorname{tg} G''$

» 65, » 7 » oben » $\frac{n'R' \sin(H' - D')}{n'' \cos H'}$

» 72, » 11 » unten tilge das Wort «Anmerkung».

» 101, » 17 bis 29 ist zu tilgen; man kann nämlich die Berechnung von r_0, s_0', s_0'' nicht umgehen, weil diese Grössen zur Bildung der nächsten Parabelhypothese unumgänglich nothwendig sind.

» 103, » 8 von unten lies $\sqrt{r} = \sqrt{\frac{1}{2}p} : \cos \frac{v}{2}, \quad \sqrt{r'} = \sqrt{\frac{1}{2}p} : \cos \frac{v'}{2}$

» 104, » 4 » oben » $n_0 = \sqrt{p} (r' + r'')^{3/2} \cos \gamma \sin \frac{\gamma}{2}$

» 105, » 15 » unten tilge das Wort «zweite».

» 124, » 18 » oben lies $n^{\text{IV}} = r' r''' \sin(v''' - v')$

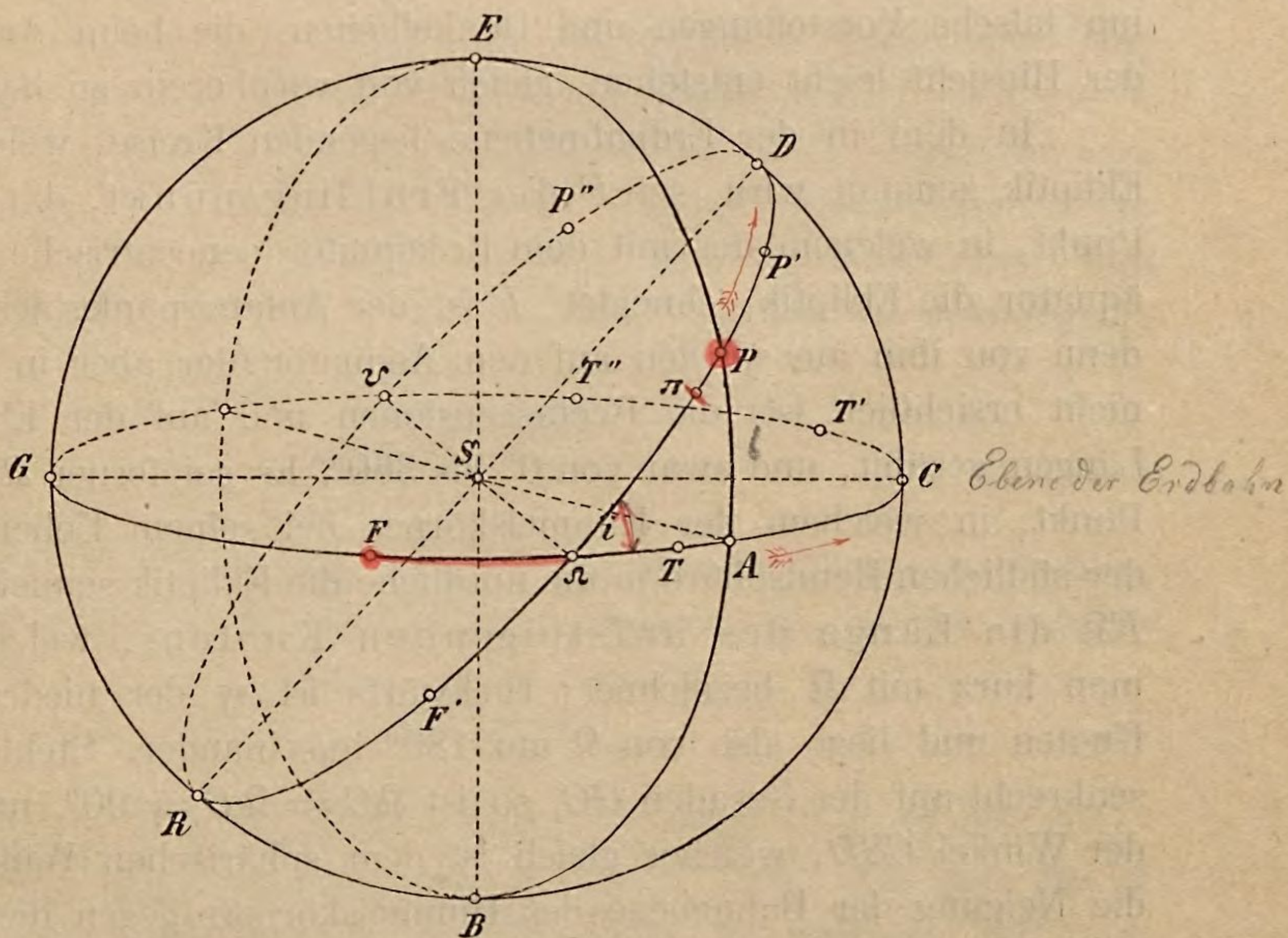
I. Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes.

1.

Wir machen im vorhinein die Voraussetzung, deren Richtigkeit später bewiesen werden wird, dass die Ebenen der Planeten- und Kometenbahnen durch den Mittelpunkt der Sonne gehen; es stelle uns nun Fig. 1 die Himmelskugel vor, in deren Mittelpunkt S sich die Sonne befindet und es sei GC die Ebene der Erdbahn,

Fig 1.



RD die Ebene einer Planeten- oder Kometenbahn, welche beiden Ebenen also durch den Mittelpunkt der Sonne gehen und die wir uns nach allen Seiten hin ins Unendliche erweitert denken können. In jeder dieser beiden Ebenen denken wir uns aus dem Mittel-

punkte S mit einem gleichen Radius von beliebiger Länge einen Kreis beschrieben, welche beiden Kreise demnach als grösste Kugelschnitte angesehen werden können.

Im Kreise $G\Omega AC\mathfrak{U}$ bewege sich die Erde in der Richtung T, T', T'' , im Kreise $R\Omega PD\mathfrak{U}$ der Himmelskörper in der Richtung P, P', P'' ; indem wir annehmen, dass sich Erde und Himmelskörper in Kreisen bewegen, lassen wir uns eigentlich eine Unrichtigkeit zuschulden kommen, aber da es sich vorläufig nur um Winkelabstände und Richtungen, nicht aber um lineare Entfernungen handelt, so ist diese Annahme gestattet und unsere Aufgabe erscheint hier in den Bereich der sphärischen Trigonometrie gerückt.

Wenn wir demnach sagen, die Erde befinde sich in T , oder der Himmelskörper stehe in P , so wollen wir damit nur die Richtungen ST und SP bezeichnen, die eigentliche Bahncurve, die Ellipse, müssen wir uns in den zwei Ebenen innerhalb oder ausserhalb der beiden Kreise gezogen denken. Wir werden demnach ganz correct sprechen, wenn wir sagen, die Erde stehe in der Richtung ST , der Himmelskörper befinde sich in der Richtung SP . Wir bemerken dies, um falsche Vorstellungen und Dunkelheiten, die beim Anfänger in der Hinsicht leicht entstehen, gleich von vornherein zu beseitigen.

In dem in der Erdbahnebene liegenden Kreise, welcher auch Ekliptik genannt wird, sei F der Frühlingspunkt, d. i. derjenige Punkt, in welchem der mit dem Erdäquator concentrische Himmelsäquator die Ekliptik schneidet; F ist der Anfangspunkt der Zählung, denn von ihm aus werden auf dem Aequator (der aber in der Figur nicht ersichtlich ist) die Rectascensionen und auf der Ekliptik die Längen gezählt, und zwar von 0° bis 360° . Es sei ferner Ω derjenige Punkt, in welchem der Himmelskörper bei seinem Uebertritte aus der südlichen Hemisphäre in die nördliche die Ekliptik schneidet, so ist $F\Omega$ die Länge des aufsteigenden Knotens, welche Grösse man kurz mit Ω bezeichnet; rückwärts ist $\mathfrak{g}$ der niedersteigende Knoten und liegt also von Ω um 180° auseinander. Steht nun $\Omega\mathfrak{U}$ senkrecht auf der Geraden GC , so ist $\Omega C = \Omega D = 90^\circ$, und es gibt der Winkel CSD , welcher gleich ist dem sphärischen Winkel $C\Omega D$, die Neigung der Bahnebene des Himmelskörpers gegen die Ekliptikebene an; dieser Winkel wird Neigung der Bahn genannt und mit i bezeichnet. Durch die Länge des aufsteigenden Knotens und Neigung der Bahn ist die Lage der Bahnebene des Himmelskörpers in Bezug auf die Ekliptik, deren Ebene wir als Fundamentalebene annehmen, vollkommen bestimmt.

Wir nehmen nun an, der Himmelskörper (Planet oder Komet) befinde sich in P und es sei π derjenige Punkt in seiner Bahn, in welchem derselbe der Sonne am nächsten zu stehen kommt (Perihel) und von welchem aus die drei Anomalien (wahre v , mittlere M , excentrische E) gezählt werden, so gibt, wenn $F'\Omega = F\Omega$ angenommen wird, das Stück $F'\pi$ die Länge des Perihels an; man bezeichnet diese Grösse kurz mit π . Dann ist $\pi P = v$ die wahre Anomalie, $F'P = \pi + v$ die Länge in der Bahn. Wenn nun E den Pol der Ekliptik vorstellt und EPA senkrecht auf $F\Omega A$ steht, so ist $FA = l$ die heliocentrische Länge und $PA = b$ die heliocentrische Breite des Ortes P , wo der Himmelskörper sich eben befindet; diese Grössen werden heliocentrisch genannt, weil wir den Mittelpunkt der Sonne als Mittelpunkt der Kugel angenommen haben; l wird von 0° bis 360° , b von 0° bis $\pm 90^\circ$ gezählt. — Das Stück $\Omega\pi P = \pi + v - \Omega$ heisst Argument der Breite und wird mit u bezeichnet, so dass stets ist

$$u = \pi + v - \Omega \dots\dots\dots 1)$$

Die mittlere Anomalie M bedeutet einen Winkel oder auch Kreisbogen, der vom Himmelskörper in ebenderselben Zeit als v , aber mit mittlerer Geschwindigkeit zurückgelegt wird. Bezeichnet man nämlich mit U die Umlaufszeit eines Planeten oder Kometen um die Sonne, das ist die Zeit, in welcher derselbe einen Bogen von 360° beschreibt, und mit μ die mittlere (tägliche) Geschwindigkeit, so ist

$$\mu = \frac{360^\circ}{U}$$

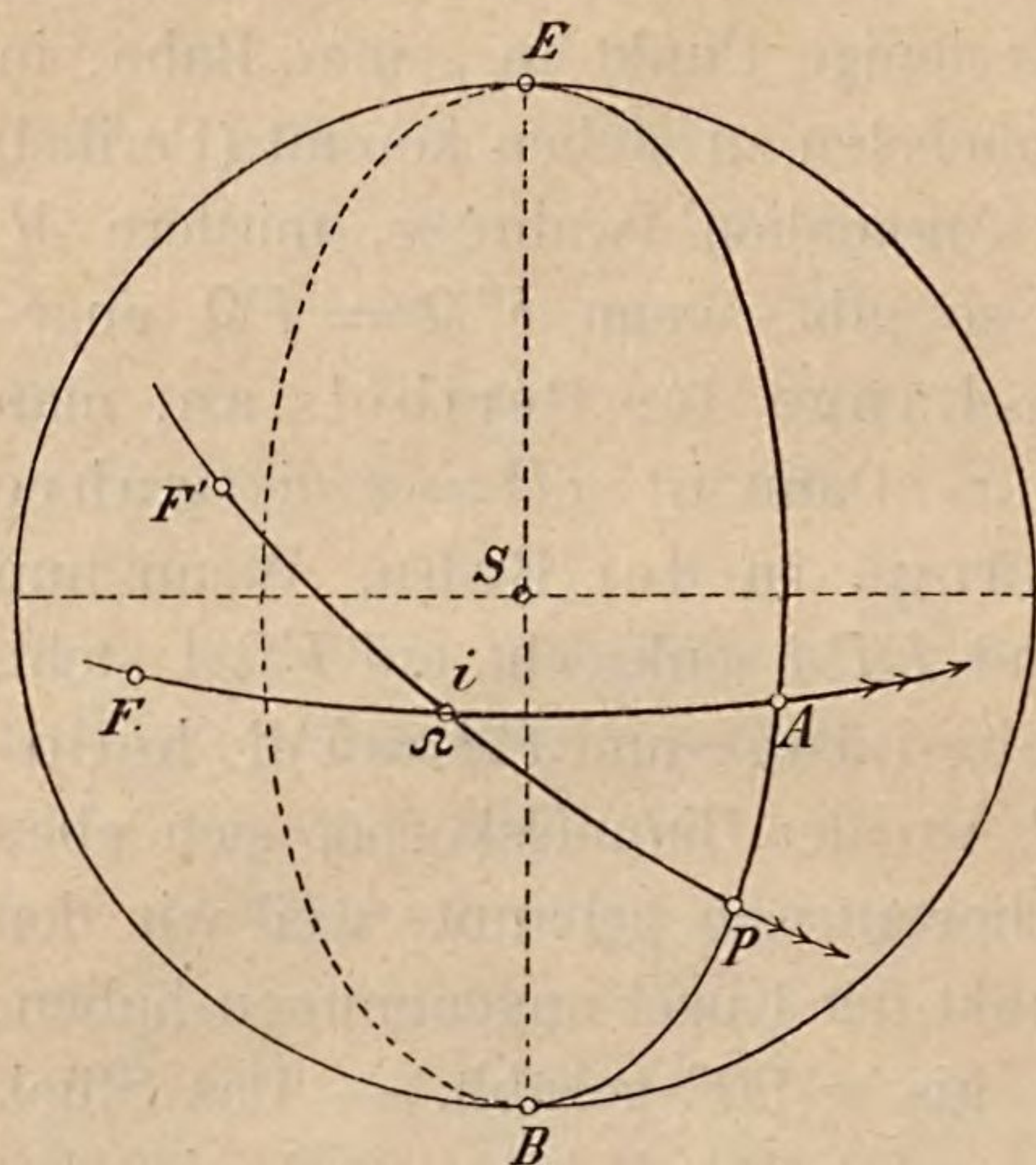
Sind seit dem Augenblicke, als der Himmelskörper im Perihel, d. i. im Punkte π , stand, t Tage verflossen, so ist die mittlere Anomalie

$$M = \mu t$$

Sowie $\pi + v$ die wahre Länge, so heisst $\pi + M$ die mittlere Länge des Himmelskörpers in seiner Bahn. Aus dem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $PA\Omega$, in welchem $\Omega P = u$, $\Omega A = l - \Omega$, $AP = b$ ist, folgt

$$\left. \begin{aligned} \cos b \cos (l - \Omega) &= \cos u \\ \cos b \sin (l - \Omega) &= \sin u \cos i \\ \sin b &= \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2)$$

Fig. 2.



aber abnehmen, dabei ist $i > 90^\circ$, siehe Fig. 2. Bei beiderlei Bewegungsrichtung ist im Perihel oder im Punkte π die wahre Anomalie $v = 0, 360^\circ$; während aber bei rechtläufiger Bewegung v von 0° an zunimmt, geht bei rückläufiger Bewegung v von 360° an zurück, und so ist es auch mit den anderen zwei Anomalien.

2.

Um auch die Entfernungen zwischen Planet, Sonne und Erde in Rechnung zu bringen, so denken wir uns im Raume ein rechtwinkliges Coordinatensystem, mit dessen Anfange oder Ursprunge der Mittelpunkt der Sonne zusammenfällt; die positive x -Achse sei nach dem Punkte F oder dem Frühlingspunkte, die positive y -Achse nach einem Punkte gerichtet, dessen heliocentrische Länge 90° beträgt und der in der Ekliptikebene liegt; dann geht nothwendigerweise die z -Achse durch den Pol der Ekliptik, d. i. durch den Punkt E ; es fällt also die xy -Ebene mit der Ebene der Ekliptik, unserer Fundamentalebene, zusammen. Sind nun x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des wahren Ortes P im Himmelsraume und r seine Entfernung vom Ursprunge, d. i. vom Mittelpunkte der Sonne, so finden bekanntlich folgende Beziehungen statt:

$$x = r \cos b \cos l, \quad y = r \cos b \sin l, \quad z = r \sin b,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Wenn wir durch den Mittelpunkt der Erde als Ursprung nun ebenfalls ein dem vorigen paralleles rechtwinkliges Achsensystem

legen, mit λ , β , Δ die geocentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunktes des Himmelskörpers vom Mittelpunkte der Erde und mit ξ , η , ζ die rechtwinkligen Coordinaten des Ortes P bezeichnen, so haben wir analog

$$\xi = \Delta \cos \beta \cos \lambda, \quad \eta = \Delta \cos \beta \sin \lambda, \quad \zeta = \Delta \sin \beta$$

Sind ferner L , B , R die geocentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunktes der Sonne vom Mittelpunkte der Erde, Grössen, wie man sie in den Ephemeriden für jeden Tag des Jahres angegeben findet, X , Y , Z die rechtwinkligen Coordinaten des gleichzeitigen Sonnenortes, so ist wieder

$$X = R \cos B \cos L, \quad Y = R \cos B \sin L, \quad Z = R \sin B$$

Da die Breiten der Sonne kaum den Wert einer Bogensekunde erreichen, so kann man auch sagen:

$$X = R \cos L, \quad Y = R \sin L, \quad Z = 0$$

Vermöge des Parallelismus der beiden Coordinatensysteme ist aber

$$x = \xi - X, \quad y = \eta - Y, \quad z = \zeta - Z$$

daher

$$\left. \begin{aligned} r \cos b \cos l &= x = \Delta \cos \beta \cos \lambda - R \cos L \\ r \cos b \sin l &= y = \Delta \cos \beta \sin \lambda - R \sin L \\ r \sin b &= z = \Delta \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots 1 \alpha)$$

Man setzt gewöhnlich $\Delta \cos \beta = \varrho$ und nennt diese Grösse die curtierte Distanz des Himmelskörpers von der Erde; ebenso wird $r \cos b$ die curtierte Distanz des Himmelskörpers von der Sonne genannt; es sind aber ϱ und $r \cos b$ die auf die Ekliptikebene projicierten wirklichen Distanzen. Nach dieser Bezeichnungsweise ist dann

$$\left. \begin{aligned} r \cos b \cos l &= x = \varrho \cos \lambda - R \cos L \\ r \cos b \sin l &= y = \varrho \sin \lambda - R \sin L \\ r \sin b &= z = \varrho \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} \dots 1 \beta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - 2R\varrho \cos(L - \lambda) + \varrho^2 \sec^2 \beta \dots 2)$$

So haben wir x , y , z auf der linken Seite durch die heliocentrischen, auf der rechten durch die geocentrischen Polarcoordinaten ausgedrückt. Vermittelst dieser Gleichungen kann man die heliocentrischen Längen, Breiten und Distanzen in geocentrische verwandeln und umgekehrt; um aber denselben eine für die Rechnung bequeme

Form zu geben, multiplicieren wir in 1 β) die erste Zeile mit $\sin l$, die zweite mit $\cos l$; mittelst Subtraction wird dann

$$q \sin(\lambda - l) = R \sin(L - l) \dots \dots \dots 3\alpha)$$

Multiplicieren wir hingegen die erste Zeile mit $\cos l$, die zweite mit $\sin l$, so kommt mittelst Addition

$$r \cos b = q \cos(\lambda - l) - R \cos(L - l) \dots \dots \dots 3\beta)$$

Macht man ebendieselben Operationen mit $\sin \lambda$ und $\cos \lambda$, so erhält man

$$r \cos b \sin(\lambda - l) = R \sin(L - \lambda) \dots \dots \dots 3\gamma)$$

$$q = r \cos b \cos(\lambda - l) + R \cos(L - \lambda) \dots \dots \dots 3\delta)$$

Wenn zuletzt noch mit $\sin L$ und $\cos L$ auf dieselbe Weise verfahren wird:

$$r \cos b \sin(L - l) = q \sin(L - \lambda) \dots \dots \dots 3\epsilon)$$

$$R = q \cos(L - \lambda) - r \cos b \cos(L - l) \dots \dots \dots 3\zeta)$$

Diese sechs Gleichungen ergeben sich aus 1 β), anscheinend sind es zu viele, aber wir werden sehen, dass eine jede von ihnen ihre Bedeutung hat und dass wir nicht zu viel entwickelt haben. Bekanntlich ist es für die Berechnung eines Winkels unter allen Umständen am gerathensten, denselben durch die Tangente auszudrücken; denn es sei für ein und denselben Winkel x

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = \operatorname{tg} x$$

so folgt mittelst Differentiation

$$dy = \cos x \, dx, \quad dy' = -\sin x \, dx, \quad dy'' = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Wenn wir y, y', y'' um einen gleichen Betrag ändern, so dass $dy = dy' = dy''$, so muss dx in jedem der drei Fälle einen verschiedenen Wert annehmen, und es wird sein

$$dx = \frac{dy}{\cos x}, \quad dx' = -\frac{dy}{\sin x}, \quad dx'' = dy \cos^2 x$$

Daraus sieht man, dass unter den drei Aenderungen des Winkels x die dritte immer die kleinste sein wird, was so viel sagen will, dass es stets am sichersten ist, einen Winkel durch die Tangente auszudrücken. Man soll daher überall, wo es nur thunlich ist, bei der Berechnung eines Winkels zu einem Ausdrucke für die Tangente zu gelangen trachten. Die obigen sechs Gleichungen gestatten dies, und zwar erhalten wir aus den ersten vier für die Verwandlung

der heliocentrischen Längen in geocentrische und umgekehrt die folgenden zwei Ausdrücke:

$$tg(\lambda - l) = \frac{R \sin(L - l)}{r \cos b + R \cos(L - l)} = \frac{R \sin(L - \lambda)}{\varrho - R \cos(L - \lambda)} \dots 4)$$

Diese beiden Ausdrücke für $tg(\lambda - l)$ wird man behufs weiterer Vereinfachung der Rechnung auf die Form

$$\frac{m \sin \alpha}{1 + m \cos \alpha}, \quad \frac{m \sin \alpha}{1 - m \cos \alpha}$$

bringen, indem man Zähler und Nenner beziehungsweise mit $r \cos b$, ϱ dividiert. Solche Ausdrücke lassen sich dann in sehr elegante Reihen auflösen, wohin wir uns aber an dieser Stelle nicht einlassen wollen, da die Sache aus der sphärischen Astronomie bekannt sein muss. Ist m ein echter Bruch, so convergieren die erwähnten Reihen; also werden auch in unserem Falle die beiden Ausdrücke für $tg(\lambda - l)$ convergente Reihen liefern, wenn

$$\frac{R}{r \cos b} < 1, \quad \frac{R}{\varrho} < 1$$

demnach echte Brüche sind. In den meisten Fällen wird dies stattfinden, aber nicht in allen, namentlich bei den Kometen nicht. Da kommen uns die letzten zwei der obigen sechs Gleichungen sehr gelegen; wir erhalten nämlich aus 3 ε) und 3 ζ) für die Verwandlung der heliocentrischen Längen in geocentrische den Ausdruck:

$$tg(L - \lambda) = \frac{r \cos b \sin(L - l)}{R + r \cos b \cos(L - l)} \dots \dots \dots 5)$$

Für die umgekehrte Operation, nämlich die Verwandlung der geocentrischen Längen in heliocentrische, wollen wir 3 ε) und 3 ζ) etwas umformen; diese zwei Gleichungen lassen sich auch folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned} r \cos b \sin(180^\circ - L + l) &= \varrho \sin(L - \lambda) \\ r \cos b \cos(180^\circ - L + l) &= R - \varrho \cos(L - \lambda) \end{aligned}$$

woraus man erhält:

$$tg(180 - L + l) = \frac{\varrho \sin(L - \lambda)}{R - \varrho \cos(L - \lambda)} \dots \dots \dots 6)$$

In 5) und 6) wird also vorausgesetzt, dass

$$r \cos b < R, \quad \varrho < R$$

ist. So bekommen wir stets für die Tangenten der gesuchten Winkel Ausdrücke, welche convergente Reihen liefern, nicht als ob wir von den Reihen selbst Gebrauch machen müssten, sondern weil die Rechnung vermittelt dieser Ausdrücke sicherer und bequemer ist.

Ueber den Quadranten, in welchem man den Winkel zu suchen hat, kann in allen den Fällen, wo der Winkel durch die Tangente ausgedrückt ist, kein Zweifel obwalten, da man immer das Vorzeichen des Zählers als das Zeichen des Sinus und das Vorzeichen des Nenners als das Zeichen des Cosinus des gesuchten Winkels ansehen muss; diese Regel würde nur dann eine Ausnahme erleiden, wenn man im Verlaufe der Entwicklung des Ausdruckes für die Tangente des zu bestimmenden Winkels irgendeinmal Zähler und Nenner mit -1 multipliciert hätte, was einer Verlegung des Winkels in den Scheitelquadranten, z. B. aus dem ersten in den dritten, gleichkommt; auf diesen Umstand soll man also nicht vergessen. In einigermaßen zweifelhaften Fällen bestimme man abgesondert die Vorzeichen des Sinus und Cosinus des gesuchten Winkels.

Aus der dritten Gleichung in 1 β) und aus 3 ϵ) ergibt sich für die Verwandlung der heliocentrischen Breiten in geocentrische und umgekehrt die Relation:

$$\operatorname{tg} b \sin (L - \lambda) = \operatorname{tg} \beta \sin (L - l) \dots\dots\dots 7)$$

Da die Breiten alle von 0° bis $\pm 90^\circ$ gezählt werden, so ist hier der Quadrant leicht zu treffen.

Die Gleichungen 3) haben eine bestimmte geometrische Bedeutung; eine nur oberflächliche Betrachtung derselben lehrt, dass wir es hier mit einem ebenen Dreiecke zu thun haben, dessen Seiten R , ρ , $r \cos b$ und die gegenüberliegenden Winkel $\lambda - l$, $180 - (L - l)$, $L - \lambda$ sind, wie die beigegefügte Fig. 3 es veranschaulicht. Dieses Dreieck STp liegt offenbar in der xy - oder Ekliptikebene (in der Figur durch die Ebene MN veranschaulicht) und ist demnach das Projectionsdreieck des von der Sonne, der Erde und dem Himmelskörper gebildeten ebenen Dreieckes im Raume. Es ist gut, sich dies zu vergegenwärtigen, wie wir überhaupt nichts verschmähen dürfen, was irgendwie zur anschaulichen Behandlung unseres verhältnismässig schwierigen Problems beitragen kann. Hier sind R , L , λ bekannt, was zur Bestimmung des Dreieckes offenbar zu wenig ist.

Demgemäss muss also sein:

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \cos \beta \cos (L - \lambda) \\ \cos \chi &= -\cos b \cos (L - l) \\ \cos \gamma &= \sin b \sin \beta + \cos b \cos \beta \cos (\lambda - l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 9)$$

Der Winkel γ , in den Lehrbüchern der theoretischen Astronomie mit z bezeichnet, hat bisher in der Theorie der Bahnbestimmung eine hervorragende Rolle gespielt; da nämlich im Dreiecke STP die Grössen R und ψ bekannt sind, so suchte man noch γ , den Winkel am Planeten, zu eruieren, damit das Dreieck zu einem bestimmten wird; dann rechnete man

$$\Delta = \frac{R \sin \chi}{\sin \gamma}$$

aber abgesehen davon, dass die Bestimmung von γ auf Gleichungen sehr hohen Grades führt, welche nicht einmal nach Bildung der sovielten und sovielten Hypothese richtig sein können, ist noch der Umstand zu beachten, dass γ zur Zeit der Opposition, in welche Zeit die meisten Entdeckungen der kleinen Planeten fallen, ein sehr kleiner Winkel wird und man also Δ aus der vorstehenden Formel mit geringer Sicherheit rechnen kann.

Die ersten zwei Gleichungen in 8) dienen zur gegenseitigen Verwandlung der Distanzen; sind die Breiten gross, wie dies bei Kometen häufig eintritt, so kann für diese Verwandlung auch die dritte Gleichung in 1 β)

$$r \sin b = \varrho \operatorname{tg} \beta = \Delta \sin \beta$$

benützt werden.

3.

Die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten x, y, z lassen sich unmittelbar durch r und u ausdrücken; zu diesem Behufe multiplicieren wir in 2) Art. 1 die erste Zeile mit $\cos \Omega$, die zweite mit $\sin \Omega$ und subtrahieren, es kommt

$$\cos b \cos l = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$$

Multiplicieren wir aber die erste Zeile mit $\sin \Omega$, die zweite mit $\cos \Omega$, so erhalten wir vermittelst Addition

$$\cos b \sin l = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$$

Multipliziert man diese zwei und die dritte Gleichung dort mit r , so ist in Berücksichtigung von 1α) im Art. 2

$$\begin{aligned}x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\z &= r \sin u \sin i\end{aligned}$$

Wir könnten hier weiterfahrend diesen drei Ausdrücken noch eine andere Gestalt geben und die sogenannten Gauss'schen Constanten aber in etwas verschiedener Form entwickeln, allein wir haben nach längerer Ueberlegung die Ueberzeugung gewonnen, dass die Einführung dieser sonst so beliebten und viel gebrauchten Constanten sowohl unnothwendig als auch der Uebersichtlichkeit der ohnehin genug verwickelten Theorie wenig förderlich ist, weshalb wir dieselben übergehen.

4.

Wegen des langsamen Zurückweichens des Frühlingspunktes F (sieh Fig. 1) und wegen der kleinen Aenderungen, welche die Lage der Ekliptik zum Aequator im Laufe der Zeit erfährt, werden offenbar die drei Elemente Ω , i , π mit der Zeit sich ändern, weshalb jedesmal angegeben werden muss, für welche Epoche diese drei Elemente gelten, damit man dieselben auf eine andere Zeit übertragen kann. Als solche Epoche wird gewöhnlich das mittlere Aequinoctium für den Anfang eines Jahres gewählt, d. i. diejenige Lage der Ekliptik zum Aequator, wie sie ohne Nutation stattfinden würde. Nimmt man das Jahr 1850 als Ausgangsepoche an und bedeutet t eine beliebige Anzahl von Jahren, so beträgt die Präcession oder das Zurückweichen des Frühlingspunktes auf der Ekliptik

$$\psi = 50 \cdot 23465'' t + 0 \cdot 00011288'' t^2$$

und die mittlere (d. i. von der Nutation befreite) Schiefe der Ekliptik

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 31 \cdot 83'' - 0 \cdot 47593'' t - 0 \cdot 00000149'' t^2$$

Sind dann T_0 und T zwei Jahreszahlen, welche uns zwei verschiedene Epochen vorstellen und man will den Betrag der Präcession für die Zwischenzeit $T - T_0$ berechnen, so bedenke man, dass von der obigen Ausgangsepoche 1850 an bis zum Jahre T die Präcession betragen wird

$$\psi = 50 \cdot 23465'' (T - 1850) + 0 \cdot 00011288'' (T - 1850)^2$$

und ebenso von 1850 bis T_0

$$\psi' = 50 \cdot 23465'' (T_0 - 1850) + 0 \cdot 00011288'' (T_0 - 1850)^2$$

für die Zwischenzeit $T - T_0$ wird also der Betrag

$$\psi - \psi' = \Delta\psi = \\ = 50 \cdot 23465'' (T - T_0) + 0 \cdot 00011288'' [(T - 1850)^2 - (T_0 - 1850)^2]$$

entfallen. Nach dem bekannten Satze über die Differenz der Quadrate ist aber

$$(T - 1850)^2 - (T_0 - 1850)^2 = (T + T_0 - 2 \cdot 1850)(T - T_0) = \\ = 2 \left(\frac{T + T_0}{2} - 1850 \right) (T - T_0)$$

Setzt man dies in den vorangehenden Ausdruck für $\Delta\psi$ ein, so wird

$$\Delta\psi = (T - T_0) \left[50 \cdot 23465'' + 0 \cdot 00022576'' \left(\frac{T + T_0}{2} - 1850 \right) \right]$$

Vermittelst der vorstehenden Formel lässt sich die Präcession für beliebige Zwischenzeiten berechnen, da T und T_0 ebensogut ganze als auch Decimalzahlen und also auch Monate, Tage u. s. w. einschliessen und auch vor 1850 liegen können.

Um jetzt auf unsere Aufgabe, nämlich die Uebertragung der Elemente Ω , i , π von einer Epoche auf eine andere, zurückzukommen, so nehmen wir an, es seien für die Epoche (mittleres Aequinoctium) T_0 die Elemente Ω_0 , i_0 , π_0 gegeben und man soll dieselben auf das mittlere Aequinoctium T übertragen. Bezeichnen wir die dieser Epoche T entsprechenden Elemente mit Ω , i , π , so wird es für kurze Zwischenzeiten genügen, zu setzen

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\psi, \quad i = i_0, \quad \pi = \pi_0 + \Delta\psi$$

wobei also nur die Präcession berücksichtigt erscheint, die Aenderungen der Lage der Ekliptik zum Aequator aber vernachlässigt werden, als ob die mittlere Schiefe ε , wofür aus dem oben gegebenen Ausdrücke der jeder beliebigen Zeit entsprechende Wert leicht zu berechnen ist, eine unveränderliche Grösse wäre. Für längere Zwischenzeiten wird man diese Aenderungen in Anschlag bringen, indem man eine kleine Correction hinzufügt. Zu diesem Ende berechne man vor allem

$$x = \left[0 \cdot 4795'' - 0 \cdot 00000624'' \left(\frac{T + T_0}{2} - 1850 \right) \right] (T - T_0)$$

$$\varphi = 173^\circ 0' 12'' + 32 \cdot 847'' \left(\frac{T + T_0}{2} - 1850 \right)$$

dann wird

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\psi + x \cotg \frac{1}{2} (i + i_0) \sin \left(\frac{\Omega + \Omega_0}{2} - \psi \right)$$

$$\pi = \pi_0 + \Delta\psi - x \tg \frac{1}{2} (i + i_0) \sin \left(\frac{\Omega + \Omega_0}{2} - \psi \right)$$

$$i = i_0 - x \cos \left(\frac{\Omega + \Omega_0}{2} - \psi \right)$$

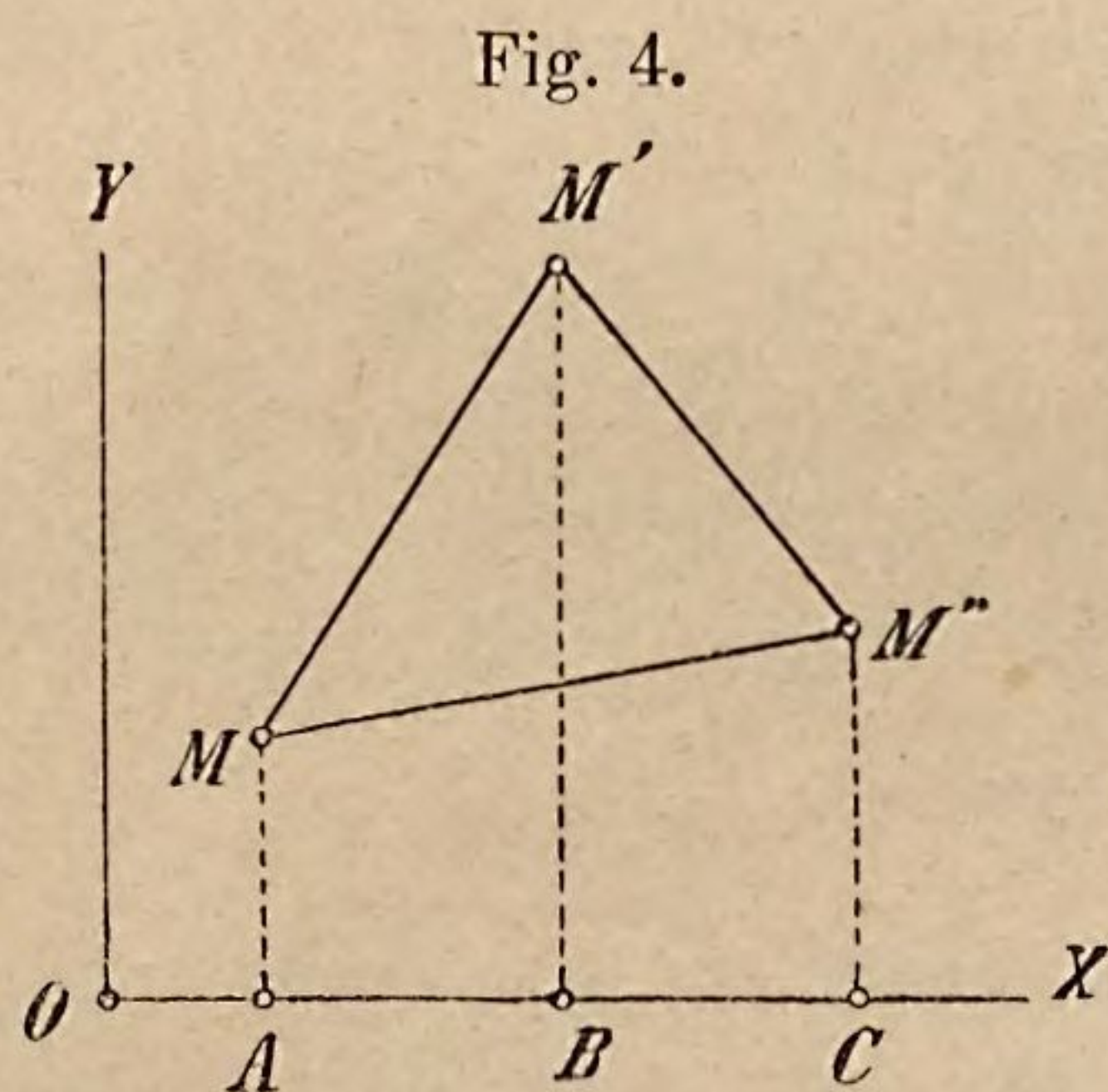
Wie man sieht, werden die erwähnten Correctionen stets sehr klein ausfallen; dieselben enthalten aber Ω und i , welche Grössen erst gefunden werden sollen, man setze daher in der ersten Rechnung $\Omega = \Omega_0 + \Delta\psi$, $i = i_0$ wie oben und wiederhole dieselbe. (Die hier vorkommenden Zahlenangaben und die Ausdrücke für die Correctionen sind Oppolzers Lehrbuch der Bahnbestimmung entnommen, wo man das Nähere nachsehe.)

II. Abschnitt.

Newton's und Keplers Gesetze. Berechnung eines einzelnen Ortes aus bekannten Elementen.

1.

Bevor wir den eigentlichen Gegenstand in Angriff nehmen, behandeln wir ein paar Aufgaben aus der analytischen Geometrie, weil dieselben in unserem Problem eine grosse Rolle spielen. — Erstens soll die Fläche eines ebenen Dreieckes, das in einer be-



stimmten xy -Ebene liegt und dessen Eckpunkte durch die Coordinaten (x, y) , (x', y') , (x'', y'') gegeben sind, analytisch bestimmt werden. Es seien (Fig. 4) OX und OY die beiden Coordinatenachsen, $MM'M''$ das ebene Dreieck, dessen Fläche f zu bestimmen ist, die Accente von M , M' , M'' seien auch die Accente der Coordinaten der betreffenden Eckpunkte. Wie aus den Lehrbüchern sattsam bekannt ist, hat man

$$f = ABM'M + BCM''M' - ACM''M \quad \text{oder} \\ x(y'' - y') - x'(y'' - y) + x''(y' - y) = 2f \dots 1\alpha)$$

in welcher Gestalt sich die Formel dem Gedächtnisse sehr leicht einprägt. Eine nicht minder gefällige und leicht anzueignende Form kann man dem Ausdrucke für die doppelte Fläche eines Dreieckes auch dadurch geben, dass man in der vorstehenden Gleichung $xy - xy = 0$ hinzu addiert; dann erhält man durch Factorenzerlegung

$$(x'' - x)(y' - y) - (x' - x)(y'' - y) = 2f \dots 1\beta)$$

Lässt man, nebenbei bemerkt, z. B. den Punkt M' der Geraden MM'' unausgesetzt sich nähern und schliesslich ganz in dieselbe fallen, so wird

$$(x'' - x)(y' - y) - (x' - x)(y'' - y) = 0$$

was die Gleichung einer durch (x, y) , (x'', y'') bestimmten Geraden ist, die man gewöhnlich in der Form

$$y' - y = \frac{y'' - y}{x'' - x} (x' - x)$$

schreibt, wobei x', y' die laufenden Coordinaten sind. So haben wir aus dem Ausdrücke für die doppelte Fläche eines Dreieckes die Gleichung einer Geraden abgeleitet, und zwar so, dass wir die Fläche bis zu ihrer Grenze, der Geraden, abnehmen liessen. Umgekehrt lässt sich aus jeder Gleichung einer Geraden ein Ausdruck für die doppelte Fläche eines Dreieckes ableiten, wenn wir die betreffende Gleichung auf Null reducieren, statt der Null aber nun $2f$ setzen; es sei z. B.

$$y' = ax' + b$$

die Gleichung einer Geraden; für die doppelte Fläche eines Dreieckes, welches diese Gerade zur Grenze hat, wird nun sein

$$y' - ax' - b = 2f$$

x' und y' sind dadurch von einander unabhängig geworden, was sie in der Gleichung der Geraden nicht waren; dafür erscheint f als die abhängig Veränderliche, d. h. man kann jetzt für x', y' beliebige Werte wählen und darnach f bestimmen; soll wirklich ein Dreieck zustande kommen, so dürfen selbstverständlich für x', y' nicht solche Werte gewählt werden, welche die Gleichung der Geraden befriedigen.

Wir kehren nach dieser kleinen Digression, die sich uns von selbst dargeboten hat und die eigentlich nicht zur Sache gehört, zu den Ausdrücken für $2f$ in 1 α) und 1 β) zurück. Soll ein Eckpunkt des Dreieckes im Coordinatenursprunge, also in O liegen, so brauchen wir nur z. B. $x'' = 0$, $y'' = 0$ anzunehmen, dann wird aus 1 α)

$$x'y - xy' = 2f \dots\dots\dots 2 \alpha)$$

oder aus 1 β)

$$x(y - y') - y(x - x') = 2f \dots\dots\dots 2 \beta)$$

Drückt man in 2α) die rechtwinkligen durch die Polarcoordinaten aus und setzt demgemäss

$$\begin{aligned} x &= r \cos v & y &= r \sin v \\ x' &= r' \cos v' & y' &= r' \sin v' \end{aligned}$$

so erhält man

$$2f = x'y - xy' = x(y - y') - y(x - x') = rr' \sin(v - v') \dots 3)$$

Lässt man hier den Punkt (x', y') sich unausgesetzt dem Punkte (x, y) nähern und diese Näherung zuletzt in den Grenzzustand übergehen, so wird sehr nahe $r' = r$, weiters ist dann $x - x' = dx$, $y - y' = dy$, $\sin(v - v') = dv$, $2f = 2df$, daher

$$2df = xdy - ydx = r^2 dv \dots \dots \dots 4)$$

Sonach ist das Dreieck in eine unendlich kleine Sectorfläche übergegangen und die einzelnen Ausdrücke in 4) sind somit das doppelte Element einer Sectorfläche. Die Formel 4) lässt sich theilweise auch folgendermassen ableiten, es ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad dv = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

da aber $x^2 + y^2 = r^2$, so wird $xdy - ydx = r^2 dv$, wo dennoch die Bedeutung der beiden Ausdrücke zur Linken und Rechten des Gleichheitszeichens nicht so klar zutage tritt, wie oben; indessen eine kleine Lehre enthält die Differentialformel für $\operatorname{tg} v$. Man ersieht aus derselben, dass der Winkel v mit desto grösserer Sicherheit erhalten wird, je grösser der Nenner in der Differentialformel wird, oder je grösser Zähler und Nenner im Ausdrucke für die Tangente sind. Es ist auch an und für sich klar, dass, wenn im Ausdrucke

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x}$$

Zähler und Nenner fortwährend abnehmen, auch die Bestimmtheit des Winkels v zusehends sich vermindert, bis endlich für

$$\operatorname{tg} v = \frac{0}{0}$$

der Winkel v ganz unbestimmt wird, denn man kann immerhin annehmen, dass y und x bei ihrem fortwährenden Abnehmen kleiner werden als jede angebbare Zahl und zuletzt in Differentiale übergehen, aber dabei ihr Verhältniss zu einander, welches eben die Tangente angibt, fortwährend bewahren, so dass

$$\operatorname{tg} v = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

unter dieser unbestimmten Form doch ein bestimmtes Verhältniss birgt. Mit solchen und ähnlichen Betrachtungen beginnt gewöhnlich die Lehre von der Differentialrechnung, wir aber kehren die Sache um und ziehen aus dem Vorangehenden den Schluss, dass, wenn für die Tangente eines Winkels zwei oder mehrere Ausdrücke zur Verfügung stehen, wie es in der Folge öfters vorkommen wird, man immer demjenigen den Vorzug geben soll, der den grössten Zähler und Nenner besitzt. Es ist dies dem Scheine nach eine unbedeutende Lehre, sie wird aber dennoch dazu dienen, um in die Vielseitigkeit, welche unserem Problem eigenthümlich ist, manches Schwanken zu beseitigen und in die Rechnung selbst Sicherheit zu bringen.

2.

Zweitens soll die Gleichung einer Ebene gefunden werden, welche durch drei im Raume gelegene Punkte $P'(x', y', z')$, $P''(x'', y'', z'')$, $P'''(x''', y''', z''')$ geht. Die Gleichung hat jedenfalls die Form:

$$y = Ax + Bz + C \dots\dots\dots 1)$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten, A, B, C aber gewisse zur Bestimmung kommende Coëfficienten bedeuten; zu dem Ende hat man den gegebenen Daten gemäss die drei Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= Ax' + Bz' + C \\ y'' &= Ax'' + Bz'' + C \\ y''' &= Ax''' + Bz''' + C \end{aligned}$$

Verbindet man die erste dieser drei Gleichungen mit der aufgestellten allgemeinen 1), so erhält man

$$y - y' = A(x - x') + B(z - z')$$

als die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt (x', y', z') geht.

Um A und B zu finden, dazu dienen dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y''' - y' &= A(x''' - x') + B(z''' - z') \\ y''' - y'' &= A(x''' - x'') + B(z''' - z'') \end{aligned}$$

Hat man daraus A und B bestimmt und setzt der Kürze halber

$$\begin{aligned} [xy] &= x'(y''' - y'') - x''(y''' - y') + x'''(y'' - y') \\ [xz] &= x'(z''' - z'') - x''(z''' - z') + x'''(z'' - z') \\ [yz] &= y'(z''' - z'') - y''(z''' - z') + y'''(z'' - z') \end{aligned}$$

so lautet die verlangte Gleichung:

$$(y - y')[xz] = (x - x')[yz] + (z - z')[xy] \dots\dots\dots 2\alpha)$$

oder durch theilweise Ausführung der angezeigten Operationen

$$2\beta) \dots\dots\dots y[xz] = \\ = x[yz] + z[xy] + x'y''z''' - x'y'''z'' + x''y'''z' - x''y'z''' + x'''y'z'' - x'''y''z'$$

Man sieht, dass $[xy]$ die doppelte Fläche eines Dreieckes bedeutet, welches in der xy -Ebene liegt und dessen drei Eckpunkte durch die Coordinaten (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') bestimmt sind; ebenso bedeutet $[xz]$ ein doppeltes ebenes Dreieck, dass in der xz -Ebene liegt und dessen drei Eckpunkte durch die Coordinaten (x', z') , (x'', z'') , (x''', z''') gegeben sind, und so stellt uns auch $[yz]$ ein in der yz -Ebene liegendes, durch die Coordinaten der Eckpunkte (y', z') , (y'', z'') , (y''', z''') gegebenes Doppeldreieck vor. Man nennt diese drei Dreiecke die Projectionsdreiecke des Raumdreieckes, dessen Eckpunkte P' , P'' , P''' im Raume liegen und welches uns die verlangte Ebene repräsentiert.

Anmerkung. Da die Ebene als die Grenze eines Tetraeders oder einer dreiseitigen Pyramide aufgefasst werden kann, in welcher eine Ecke durch unausgesetzte Näherung an die gegenüberliegende Fläche endlich verschwunden ist, so muss die auf Null reducierte Gleichung einer Ebene offenbar mit dem Ausdrücke für das Volumen eines Tetraeders verwandt sein, gerade so, wie wir im vorangehenden Artikel gesehen haben, dass die auf Null reducierte Gleichung einer Geraden die doppelte Fläche eines Dreieckes darstellt. Da in unserem Falle $[xy]$, $[xz]$, $[yz]$ lauter Doppeldreiecke oder Parallelogramme sind, so können wir mit Bestimmtheit behaupten, dass wir es hier mit einem vierseitigen Prisma zu thun haben, dessen Projectionen auf die drei Coordinatenebenen eben Parallelogramme sein müssen. Nun lässt sich das vierseitige Prisma in zwei dreiseitige Prismen von gleichem Volumen, das dreiseitige Prisma in drei Tetraeders oder dreiseitige Pyramiden von ebenfalls gleichem Volumen zerlegen; daher ist das vierseitige Prisma das Sechsfache eines solchen Tetraeders; bezeichnen wir das Volumen eines Tetraeders mit V , so besteht dem Gesagten zufolge die Gleichung:

$$(x - x') [yz] - (y - y') [xz] + (z - z') [xy] = 6V \dots 3)$$

Dadurch ist y von x und z unabhängig geworden und kann nun selbst unbekümmert um x und z beliebige Werte annehmen. Hiemit ist auf indirectem Wege die Aufgabe gelöst, das Volumen eines Tetraeders zu bestimmen, dessen vier Eckpunkte durch die entsprechenden Raumcoordinaten gegeben sind.

Aus der Gleichung 2β), die einer jeden beliebigen Ebene gilt, lässt sich nun auch die Gleichung einer durch den Koordinatenanfang gehenden Ebene ableiten; zu diesem Ende brauchen wir nur einen der drei Punkte in den Ursprung selbst zu verlegen oder z. B. $x''' = 0, y''' = 0, z''' = 0$ zu setzen, dann ist

$$y (x'z'' - x''z') = x (y'z'' - y''z') + z (x'y'' - x''y') \dots 4)$$

Hiebei sind die Coëfficienten in den Klammern Projectionsdreiecke, die mit dem Raumdreiecke, wovon zwei Eckpunkte im Raume sich befinden, im Koordinatenanfang einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen.

3.

Die Planeten und Kometen bewegen sich um die Sonne infolge einer ihnen ursprünglich mitgetheilten Bewegung und einer continuierlichen Anziehung, welche die Sonne als Centralkörper auf sie ausübt, und vermöge welcher sie in geschlossenen Curven dieselbe umkreisen; denn es ist, um es hier schon zu bemerken, von vornherein nicht denkbar, dass diese Himmelskörper, einmal in den Bereich der anziehenden Centrakraft gerückt, derselben sich je entziehen könnten. Um die Gesetze dieser Bewegung und die dabei beschriebene Curve näher kennen zu lernen, machen wir eine kurze Umschau in den Gesetzen der Bewegung überhaupt. Man unterscheidet bekanntlich erstens eine gleichförmige Bewegung, wo der bewegte Körper in jeder bestimmten Zeiteinheit (Secunde, Minute, Stunde, Tag) gleiche Strecken zurücklegt; er folgt dabei einer momentanen Kraft und bewegt sich, wenn keine Hindernisse entgegenwirken, vermöge der Trägheit geradlinig fort. Bedeutet v die Geschwindigkeit, d. i. den Weg, welchen der Körper in einer Zeiteinheit macht, t die Dauer der Bewegung, ausgedrückt in der Benennung der gewählten Zeiteinheit, s den während der Zeit t zurückgelegten Weg, so ist

$$s = vt \dots \dots \dots 1)$$

wobei s dieselbe Benennung erhält, in der v ausgedrückt worden ist; wenn man differenziert, so kommt, weil v constant ist,

$$ds = v dt \dots \dots \dots \text{für } 1)$$

Die Geschwindigkeit des Beweglichen ist daher bei einer gleichförmigen Bewegung gleich dem ersten Differentialquotienten des Weges in Hinsicht der Zeit.

Es gibt aber zweitens in der Natur Bewegungen, wobei die in gleichen Zeiten beschriebenen Wege ungleich sind, wo also die Geschwindigkeit des Beweglichen sich stetig ändert; ist diese Aenderung eine gleichförmige, so dass die Geschwindigkeit in jeder folgenden Zeiteinheit wie in einer arithmetischen Reihe um einen gleichen Betrag wächst oder abnimmt, so nennt man dies eine gleichförmig beschleunigte (verzögerte) Bewegung. Wenn wir den in jeder Zeiteinheit stattfindenden Zuwachs an Geschwindigkeit mit g bezeichnen, so wird die Geschwindigkeit am Ende der

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1., & 2., & 3., & 4., & 5. & \dots & t\text{-Zeiteinheit} \\ v = & g & 2g & 3g & 4g & 5g & \dots & gt \end{array}$$

also allgemein

$$v = gt \dots \dots \dots 2)$$

Bei dieser Art von Bewegung erscheint daher nicht allein der Weg, sondern auch die Geschwindigkeit als eine Function der Zeit; setzen wir in die obige Differentialformel für 1) den hier gefundenen Wert der Geschwindigkeit ein, so erhalten wir

$$ds = gt dt \dots \dots \dots \text{für } 3)$$

vermittelst Integration wird

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{vt}{2} \dots \dots \dots 3)$$

Das Ergebnis der ganzen Bewegung, der Weg, fällt daher gerade so aus, als ob das Bewegliche mit mittlerer Endgeschwindigkeit oder richtiger mit einer Geschwindigkeit sich bewegt hätte, die das arithmetische Mittel zwischen der Anfangs- und Endgeschwindigkeit bildet, was der Natur der Sache vollkommen entspricht, da der Zuwachs als gleichförmig angenommen wurde. Entwickelt man aus dem ersten den zweiten Differentialquotienten, so ist, da dt zu einer Constanten gemacht werden kann,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \dots \dots \dots \text{für } 3)$$

oder die Beschleunigung g ist gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges in Hinsicht der Zeit. Diese Beschleunigung wird durch eine stetig wirkende Anziehungskraft erzeugt, die jedem Körper, als Masse betrachtet, innewohnt, eine Thatsache, die bisher noch nicht eine genügende Erklärung gefunden hat; je grösser die Masse des Körpers ist, desto grösser auch dessen Anziehungskraft und die

durch die letztere bewirkte Beschleunigung. Die Grösse g hat daher für jeden Körper ihren besonderen Wert und hängt also von dessen Masse ab. Allein auch für einen einzelnen Körper ist dieselbe nicht eine unwandelbare Grösse, sondern nimmt nach Newton gerade so wie die Intensität des Lichtes mit dem Quadrate der Entfernung ab. Dem Gesagten gemäss gibt es daher, strenge genommen, keine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Natur, sondern nur eine ungleichförmig beschleunigte (verzögerte).

Wenden wir die hier ausgesprochenen, von Newton herrührenden zwei Principien auf die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne an; demnach wird ein Himmelskörper in zwei verschiedenen Entfernungen von der Sonne mit verschiedener Beschleunigung angezogen werden, und zwar besteht, wenn r und r' die beiden Entfernungen, g_s und g_s' die entsprechenden in einer bestimmten Zeiteinheit (Secunde . . . Tag) von der Sonne bewirkten Beschleunigungen des Himmelskörpers bedeuten, die Proportion:

$$g_s : g_s' = r'^2 : r^2 \quad \text{oder} \quad g_s r^2 = g_s' r'^2$$

Aehnlich wie bei der Wurfbewegung die Schwerkraft der Erde wirkt, haben wir uns auch bei der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne die Sache so zu denken, dass der Körper, anstatt der Bewegung in der Tangentenrichtung zu folgen, fortwährend zur Sonne sinkt; g_s und g_s' sind daher wie beim freien Falle, der einfachsten Erscheinung in dieser Hinsicht, Geschwindigkeiten (ausgedrückt in Metern, Kilometern), die der Körper am Ende der ersten Zeiteinheit erlangt. Um auch bei dieser Veränderlichkeit der Anziehungskraft oder der durch dieselbe bewirkten Beschleunigung eine Constante zu erhalten, setzen wir

$$k^2 = g_s r^2 = g_s' r'^2 = g_s'' r''^2 = \dots$$

und haben demnach ganz allgemein für die Anziehungskraft der Sonne den Ausdruck:

$$g_s = \frac{k^2}{r^2} \dots \dots \dots 4)$$

Ueber den Wert und die Bedeutung dieser Constante, wofür wir lieber in Rücksicht auf die Dimensionen k setzen möchten, wird später gesprochen werden. — Besitzt der angezogene Himmelskörper selbst eine Masse, so wird auch er die Sonne an sich zu ziehen trachten, und zwar bei der gleichen Entfernung r mit einer Kraft,

die sich zur Anziehungskraft der Sonne verhält, wie die Massen der beiden Körper. Setzen wir demnach den Quotient

$$\frac{\text{Masse des Himmelskörpers}}{\text{Masse der Sonne}} = m$$

so ist die Beschleunigung, mit welcher der Himmelskörper die Sonne an sich zieht, ausgedrückt durch

$$g_m = \frac{mk^2}{r^2} \dots\dots\dots 5)$$

Dieser Ausdruck gibt aber auch ganz allgemein die Beschleunigung an, die ein Körper von der Masse m (in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückt) einem anderen in der Entfernung r befindlichen Körper mittheilt.

Die Anziehung, welche der Himmelskörper auf die Sonne ausübt, können wir nach dem Gesetze der relativen Bewegung auf die letztere übertragen und uns dabei die Sonne als ruhend denken; weil bei dieser Anziehung zur Sonne hin die Radienvectoren der Planeten und Kometen kleiner werden, so ist diese Gesamtbeschleunigung negativ zu nehmen, so dass wir haben

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g = - \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{mk^2}{r^2} \right) = - \frac{k^2(1 + m)}{r^2} \dots\dots 6)$$

Diese Formel bildet die Grundlage für unsere fernere Erörterung über die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne; darin kann t Secunden, Minuten . . . Tage bedeuten, je nachdem g als die Beschleunigung in der ersten Secunde, Minute . . . Tage angesehen wird; ebensowenig ist hier etwas Bestimmtes über die Längeneinheit, in der g , k^2 , r auszudrücken sind, enthalten, offenbar aber muss die Benennung von k^2 auf g übergehen.

4.

Um die Differentialgleichung 6) integrieren zu können, zerlegen wir die Beschleunigung g in drei Componenten, parallel zu den Achsen des rechtwinkligen durch den Mittelpunkt der Sonne gelegten Coordinatensystems, welches wir oben in I. 2 beschrieben haben und das wir auch hier zugrunde legen. Sind nämlich α , β , γ die Winkel, welche die Achsen des Systems mit dem Radiusvector r eines Punktes P im Raume einschliessen, so ist

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma$$

Das Verhältniß, in welchem hier die Coordinaten x, y, z zu ihrem Radiusvector r stehen, ist aber offenbar auch das Verhältniß zwischen den drei Componenten und ihrer Resultierenden g , ähnlich wie im Kräfteparallelogramme, daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \cos \alpha, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g \cos \beta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g \cos \gamma$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g \frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g \frac{z}{r} \quad \dots 1)$$

Wir drücken der Kürze halber g noch nicht durch seinen oben gefundenen Wert aus. Multipliciert man die erste der vorstehenden drei Gleichungen mit y , die zweite mit x und subtrahiert, so kommt, wenn auch mit den übrigen Verbindungen analog verfahren wird, im ganzen

$$\left. \begin{aligned} x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Wir multiplicieren mit dt und integrieren, dann wird

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c' \\ x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} &= c'' \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c''' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

wo c', c'', c''' die Integrationsconstanten bedeuten; multipliciert man die erste Gleichung in 3) mit z , die zweite mit y , die dritte mit x , so erhält man vermittelst Addition

$$c'z + c''y + c'''x = 0 \quad \dots \dots \dots 4)$$

was die Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gehenden Ebene ist. Die Planeten und Kometen bewegen sich daher in Ebenen, die durch den Mittelpunkt der Sonne gehen.

Um die Coëfficienten c' , c'' , c''' näher zu bestimmen, so müssen wir vor allem beachten, dass die Gleichung 4) Art. 2

$$y(x'z'' - x''z') = x(y'z'' - y''z') + z(x'y'' - x''y') \dots 5)$$

ebenfalls als die Gleichung einer Planeten- oder Kometenbahnebene angesehen werden kann, nur dass hier die Coëfficienten durch die Coordinaten zweier Punkte in der Bahn des Himmelskörpers ausgedrückt sind, und zwar sind diese Coëfficienten, wie wir bereits wissen, Ausdrücke für die Projectionsdreiecke des Raumdreieckes, welches von zwei Orten P' und P'' des Himmelskörpers und dem Mittelpunkte der Sonne gebildet wird. Die drei Projectionsdreiecke lassen sich aber durch das Raumdreieck ausdrücken. Zufolge der Gleichungen in I. 3 ist für den Ort P'

$$\begin{aligned} x' &= r' (\cos u' \cos \Omega - \sin u' \sin \Omega \cos i) \\ y' &= r' (\cos u' \sin \Omega + \sin u' \cos \Omega \cos i) \\ z' &= r' \sin u' \sin i \end{aligned}$$

und für den Ort P''

$$\begin{aligned} x'' &= r'' (\cos u'' \cos \Omega - \sin u'' \sin \Omega \cos i) \\ y'' &= r'' (\cos u'' \sin \Omega - \sin u'' \cos \Omega \cos i) \\ z'' &= r'' \sin u'' \sin i \end{aligned}$$

wo $u' = \pi - \Omega + v'$, $u'' = \pi - \Omega + v''$ ist.

Bildet man jetzt die Producte für $x'y''$, $x''y'$, $y'z''$ u. s. w., so wird in Berücksichtigung, dass $u'' - u' = v'' - v'$ ist,

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= r'r'' \sin(v'' - v') \cos i \\ x'z'' - x''z' &= r'r'' \sin(v'' - v') \cos \Omega \sin i \\ y'z'' - y''z' &= r'r'' \sin(v'' - v') \sin \Omega \sin i \end{aligned}$$

$r'r'' \sin(v'' - v')$ ist offenbar der Ausdruck für das doppelte Raumdreieck, wovon wir oben gesprochen; bezeichnen wir dasselbe der Kürze halber mit n , die Projectionsdreiecke aber der Reihe nach mit ν , ν_1 , ν_2 , so haben wir

$$\left. \begin{aligned} \nu &= x'y'' - x''y' = n \cos i \\ \nu_1 &= x'z'' - x''z' = n \cos \Omega \sin i \\ \nu_2 &= y'z'' - y''z' = n \sin \Omega \sin i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

Substituieren wir dies in 5), so lautet die Gleichung der Bahnebene, da n herausfällt,

$$\left. \begin{aligned} y \cos \Omega \sin i &= x \sin \Omega \sin i + z \cos i \\ \text{oder} \\ z &= \operatorname{tg} i (y \cos \Omega - x \sin \Omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 7)$$

Drücken wir hier die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die heliocentrischen Polarcoordinaten r, l, b nach 1 β) in I. 2 aus, so kommt, weil r schwindet,

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin (l - \Omega) \dots\dots\dots 8)$$

welche Gleichung auch aus 2) in I. 1 resultiert. Drückt man hingegen x, y, z durch die rechte Seite von 1 β) in I. 2, also durch die geocentrischen Polarcoordinaten aus, so erhalten wir

$$\varrho \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} i [R \sin (\Omega - L) - \varrho \sin (\Omega - \lambda)] \dots\dots\dots 9)$$

aus welcher Gleichung sich die curtierte Distanz ϱ sehr leicht berechnen lässt, wenn die übrigen darin vorkommenden Grössen gegeben sind; man hat nämlich

$$\varrho = \frac{R \sin (\Omega - L) \operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} \beta + \sin (\Omega - \lambda) \operatorname{tg} i} \dots\dots\dots 10)$$

wo man behufs grösserer Bequemlichkeit Zähler und Nenner früher mit $\operatorname{tg} \beta$ dividieren wird, bevor man an eine wirkliche Berechnung geht.

5.

Aus den Gleichungen 6) des vorigen Artikels lassen sich jetzt auf demselben Wege, auf welchem wir die Ausdrücke für das doppelte Sectorelement in 4) des Art. 1 abgeleitet haben, folgende Gleichungen bilden, wenn man zugleich 3) des vorigen Artikels berücksichtigt:

$$\left. \begin{aligned} c' dt &= x dy - y dx = r^2 dv \cos i \\ c'' dt &= x dz - z dx = r^2 dv \cos \Omega \sin i \\ c''' dt &= y dz - z dy = r^2 dv \sin \Omega \sin i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 1)$$

Quadriert man hier die ersten und dritten Theile und vereinigt sie dann mittelst Addition, so wird nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$\sqrt{c'^2 + c''^2 + c'''^2} dt = r^2 dv$$

Bedenken wir, dass $r^2 dv = 2dS$ ist, wo S die Sectorfläche bezeichnet, und setzen der Kürze halber $\sqrt{c'^2 + c''^2 + c'''^2} = c$, so ist

$$2dS = c dt = r^2 dv \dots\dots\dots 2)$$

daraus ergibt sich durch Integration

$$2S = ct \dots\dots\dots 3)$$

Die Sectorflächen ändern sich daher der Zeit proportional oder in gleichen Zeiten werden vom Himmelskörper gleiche Flächenräume beschrieben (Keplers Gesetz). Wenn beispielsweise t mittlere Sonnentage bezeichnet, so ist $\frac{c}{2}$ die Fläche, die der Himmelskörper an einem mittleren Sonnentage beschreibt, also die Flächengeschwindigkeit. Setzt man in den Gleichungen 1) statt $r^2 dv$ nun $c dt$ und dividirt mit dt , so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} c' &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c \cos i \\ c'' &= x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} = c \cos \Omega \sin i \\ c''' &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c \sin \Omega \sin i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

wodurch die Bedeutung der Coëfficienten c' , c'' , c''' in 3) und 4) des vorigen Artikels klargestellt ist.

6.

Die bisherigen Entwicklungen, in denen g aus dem Calcul ganz eliminiert erscheint, und die abgeleiteten zwei Gesetze gelten der Centralbewegung im allgemeinen, welcher Regel auch immer die Anziehung der Centralkraft folgen mag. Bevor wir nun weiterfahren, wollen wir auf einem einfachen Wege zwei Ausdrücke für das Bogen-differential ds ableiten; dieses Differential kann nämlich in unserem Falle als ein unendlich kleiner Theil der vom Himmelskörper beschriebenen Curve und als geradlinig betrachtet werden. Dividieren wir dann ds durch dt , so gelangen wir ähnlich wie in 1) des Art. 3 zu einem Ausdrücke für die Geschwindigkeit des Himmelskörpers im betreffenden Punkte der Bahn. — Im Raumdreiecke, welches von den Orten P' und P'' des Körpers und dem Mittelpunkte der Sonne gebildet wird und wovon im Art. 4 die Rede war, bezeichne s die Sehne zwischen den beiden Orten; der von den Radienvectoren r' und r'' eingeschlossene Winkel ist nach dem obigen $v'' - v'$, daher ist nach dem Carnot'schen Lehrsätze

$$\begin{aligned} s^2 &= r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(v'' - v'), \text{ dazu addieren wir} \\ 0 &= -2r'r'' + 2r'r'' \\ \hline \text{mithin } s^2 &= (r'' - r')^2 + 4r'r'' \sin^2 \frac{1}{2}(v'' - v') \dots \dots \dots 1) \end{aligned}$$

Lassen wir die Sehne nun unausgesetzt abnehmen, so werden die Punkte P' und P'' sich fortwährend nähern, der Winkel $\frac{1}{2}(v'' - v')$ wird zuletzt unendlich klein; im Grenzzustande erscheint $r'' - r' = dr$ als eine unendlich kleine Grösse, so dass man

$$r'' = r', \quad 4 \sin^2 \frac{1}{2}(v'' - v') = 4 \cdot \left(\frac{v'' - v'}{2} \right)^2 = dv^2$$

setzen kann; somit ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dv^2 \quad \dots \dots \dots \text{für 1)}$$

Die Sehne s lässt sich aber auch durch die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Punkte P' und P'' ausdrücken; es ist nämlich nach einem bekannten Satze aus der Geometrie des Raumes

$$s^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 \quad \dots \dots \dots 2)$$

Lassen wir auch hier die beiden Punkte P' und P'' immer näher aneinanderrücken, so wird zuletzt im Grenzzustande s zu ds und

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \dots \dots \dots \text{für 2)}$$

Um zu einem Ausdruck für die Geschwindigkeit in der Bahn zu gelangen, multiplicieren wir die Gleichungen 1) im Art. 4, von denen wir hier nochmals ausgehen, der Reihe nach mit dx , dy , dz und addieren, so ist, wenn für g sein oben festgestellter Wert $-\frac{k^2(1+m)}{r^2}$ eingesetzt wird,

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = -\frac{k^2(1+m)}{r^3} (xdx + ydy + zdz)$$

Der Zähler links ist das Differential von $\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{1}{2}ds^2$ und $xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}d(r^2) = rdr$, also hat man

$$d\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right) = -\frac{2k^2(1+m)dr}{r^2}$$

Integriert man beiderseits, so erscheint, weil $\int -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r}$

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2k^2(1+m)}{r} + h$$

wo h die Constante der Integration bedeutet. Es ist also die Geschwindigkeit des Himmelskörpers in seiner Bahn:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2k^2(1+m)}{r} + h} \quad \dots \dots \dots 3)$$

Die Bedeutung der Constante h wird weiter unten klargestellt werden. Um auch die Gleichung der Bahncurve zu ermitteln, so ist dem Vorangehenden gemäss

$$\left. \begin{aligned} ds^2 = dr^2 + r^2 dv^2 &= \left[\frac{2k^2(1+m)}{r} + h \right] dt^2 \\ r^2 dv &= c dt \end{aligned} \right\} \dots \alpha)$$

Eliminiert man hieraus dt , so wird

$$dr^2 + r^2 dv^2 = \left[\frac{2k^2(1+m)}{r} + h \right] \frac{r^4 dv^2}{c^2}$$

oder

$$c^2 dr^2 = r^2 dv^2 [2k^2(1+m)r + hr^2 - c^2]$$

Um schnell zum Ziele zu gelangen, setzen wir

$$h = \frac{k^2(1+m)(e^2-1)}{p}, \quad e^2 = k^2(1+m)p \dots 4)$$

Durch diese Substitution fällt $k^2(1+m)$ ganz heraus, und es kommt, wenn nebstbei die Quadratwurzel ausgezogen wird,

$$pdr = r dv \sqrt{2rp + e^2 r^2 - r^2 - p^2}$$

oder

$$pdr = r dv \sqrt{e^2 r^2 - (r-p)^2}$$

Bringt man dv allein auf die linke Seite und dividiert mit er , so wird

$$dv = \frac{\frac{pdr}{er^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r-p}{er}\right)^2}} = \frac{d\left(\frac{r-p}{er}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r-p}{er}\right)^2}}$$

woraus man vermittelst Integration erhält, da die Integrationsconstante schwindet,

$$-\cos v = \frac{r-p}{er}$$

Die Gleichung der Bahncurve lautet sonach:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \dots 5)$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung einer Ellipse, wobei p den halben Parameter und e die numerische Excentricität bedeuten; die halbe grosse Achse a und die kleine Halbachse b sind, wie ebenfalls bekannt, ausgedrückt in der Relation:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \dots\dots\dots 6)$$

Dass die Planeten in Ellipsen sich bewegen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet, hat schon Kepler gelehrt; in Hinsicht der Kometen aber hat man bisher angenommen, dass ihre Bahnen ebenso gut Ellipsen als auch Parabeln und Hyperbeln sein können, denn die Gleichung 5) ist ganz allgemein und gilt für alle Kegelschnittlinien. Unsere Meinung, die wir an betreffender Stelle näher begründen werden, geht dahin, dass auch die Kometenbahnen ausnahmslos geschlossene Curven, also Ellipsen sind, die aber bedeutende Excentricitäten besitzen, während die Ellipsen der Planeten eine nur geringe Excentricität aufweisen und sich so dem Kreise mehr oder weniger nähern. Die Bahnen der Planeten und Kometen sind demnach zwischen Kreis und Parabel eingeschlossen, ohne jedoch diese beiden Grenzen irgendwie zu erreichen; man kennt wenigstens keinen Planeten, dessen Bahn ein Kreis wäre, umsoweniger ist bei den Kometenbahnen eine Parabel denkbar, da der Himmelskörper, einmal in die Sphäre der anziehenden Kraft der Sonne gebracht, sich derselben unmöglich entziehen kann. Die Hyperbel endlich mit ihren imaginären Verhältnissen muss von vornherein hier ganz ausgeschlossen werden, da das Imaginäre mit unserer durchaus realen Welt nichts zu schaffen haben kann.

Wenn wir jetzt den Wert der Constante h aus 4) in 3) einsetzen, so erhalten wir als Ausdruck für die Geschwindigkeit des Himmelskörpers in der Bahn

$$v = \frac{ds}{dt} = k \sqrt{1+m} \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} \dots\dots\dots 7)$$

7.

Aus der zweiten Gleichung in 4) des vorigen Artikels folgt

$$c = k \sqrt{p(1+m)} \dots\dots\dots 1)$$

Setzt man diesen Wert von c in den Ausdruck für die doppelte Sectorfläche in 3) Art. 5 ein, so wird

$$2S = kt \sqrt{p(1+m)} \dots\dots\dots 2)$$

Bezeichnet man in üblicher Weise die grosse Halbachse einer Ellipse mit a , die kleine Halbachse mit b , so ist der Flächeninhalt der Ellipse bekanntlich $ab\pi$; ist ferner U die Umlaufszeit eines Planeten, in mittlerer Zeiteinheit ausgedrückt, so ergibt sich aus 2), wenn man von der Sectorfläche auf die Fläche der ganzen Ellipse übergeht,

$$2ab\pi = kU\sqrt{p(1+m)}$$

oder weil $p = \frac{b^2}{a}$ ist:

$$2a^{3/2}\pi = kU\sqrt{1+m} \dots\dots\dots 3)$$

In der Ellipse eines anderen Planeten sei a' die grosse Halbachse, U' die Umlaufszeit, die Masse desselben m' , so ist analog

$$2a'^{3/2}\pi = kU'\sqrt{1+m'}$$

daher

$$a^3 : a'^3 = U^2(1+m) : U'^2(1+m')$$

worin das berichtigte dritte Kepler'sche Gesetz ausgesprochen liegt.

Jetzt ist es an der Zeit, dass wir auch die Constante k^2 bestimmen; die Gleichung 3) gibt

$$g_s r^2 = k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{U^2(1+m)}$$

Aus der siderischen Umlaufszeit der Erde $U = 365.256374$ Tage und der Masse derselben $m = \frac{1}{332000}$ ergibt sich, wenn wir $a = 1$ setzen und daher die grosse Halbachse der Erdbahnellipse als Längeneinheit annehmen,

$$\lg k = 8.2355815 - 10 \text{ im Bogenmasse.}$$

Setzen wir hingegen $2\pi = 360^\circ = 1296000''$, so kommt

$$\lg k'' = 3.5500066 \text{ in Secunden.}$$

Weil $2\pi : U = \mu$ der mittleren täglichen Bewegung gleichgesetzt ist (sieh I. 1), so ist auch

$$k = \frac{\mu a^{3/2}}{\sqrt{1+m}}$$

Weil U in Tagen ausgedrückt ist, so bedeutet t im ganzen Problem Tage und k^2 die in der Entfernung $r = a = 1$ an einem mittleren Sonnentage bewirkte Beschleunigung; auch sind alle zum Vor-

schein kommenden Distanzen, also auch k in Einheiten der grossen Halbachse der Erdbahn ausgedrückt. — Hätte man beispielsweise U in Secunden verwandelt, so würde dann k^2 die Beschleunigung in der ersten Secunde bedeuten und t müsste ebenfalls in Secunden ausgedrückt sein.

Anmerkung 1. Bei der Berechnung der Störungen, welche der Mond durch die Sonne erfährt, wird es, um eine Verschiedenheit in der Längeneinheit zu vermeiden, gerathener sein, die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde als Längeneinheit einzuführen. Bezeichnet man diese Entfernung, welche gegenwärtig zu 384415·5 Kilometer angenommen wird, allgemein mit a' und setzt $a = a'\lambda$, so verwandelt sich die Gleichung 3) in

$$2(a'\lambda)^{3/2}\pi = kU\sqrt{1+m} \dots\dots\dots 3\beta)$$

Als der wahrscheinlichste Wert für die Entfernung der Erde von der Sonne gilt heutzutage $a = 149\cdot31$ Millionen Kilometer bei einer Horizontal - Aequatorial - Parallaxe der Sonne von $8\cdot81''$, sonach ist

$$\lambda = \frac{a}{a'} = 388\cdot412$$

d. h. so vielmal ist die Sonne von der Erde entfernter, als der Mond: führt man diesen Wert von λ in 3 β) ein und setzt $a' = 1$, so wird für diese Längeneinheit

$$\lg k = 2\cdot1195135$$

Bestimmen wir daraus k^2 , so haben wir die Anziehungskraft der Sonne in der Entfernung a' , in welcher Längeneinheit dann alle vorkommenden Distanzen auszudrücken sind.

Anmerkung 2. Die Gleichung 3) gilt natürlich auch für das Verhältniss zwischen einem Planeten und dem ihn umkreisenden Monde. Nun beträgt die Umlaufszeit des Mondes der Erde $U = 27\cdot321661$ mittlere Sonnentage, die Masse desselben (im Verhältnisse zur Erdmasse) $\frac{1}{79\cdot667}$; mit diesen zwei Daten und der Annahme $a' = 1$ wird dann

$$\lg k_e = 9\cdot3589641 - 10$$

wo k_e^2 die von der Erde an einem mittleren Sonnentage in der Entfernung $a' = 1$ bewirkte Beschleunigung bedeutet.

Für die Beschleunigung in einer beliebigen Entfernung r hat man also ganz allgemein

$$g = \frac{k^2}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{U} \cdot \frac{a}{r}\right)^2 \cdot \frac{a}{1+m}$$

Setzt man hierin die Umlaufszeit des Mondes $U = 2360591.5$ Secunden, $a : r = 60.2778$, weil nämlich der Mond 60.2778 Erdradien von der Erde entfernt ist, $a = 384415500$ Meter und $m = \frac{1}{79.667}$, so kommt

$$g = 9.7727^m$$

als Beschleunigung in der ersten Secunde auf der Oberfläche der Erde; die Versuche geben nach Schmidt am Aequator den Wert $g = 9.781^m$. An diesem Beispiele hat bekanntlich Newton die Richtigkeit seiner Theorie erprobt.

Anmerkung 3. Weil sich in gleichen Entfernungen die Anziehungskräfte zweier Körper so verhalten wie ihre Massen, so muss die Proportion existieren:

$$k_e^2 : k^2 = m : 1, \quad \text{also} \quad m = \left(\frac{k}{k_e}\right)^2$$

Wir hatten oben für die Entfernung des Mondes von der Erde als Längeneinheit gefunden:

$$\lg k_e = 9.3589641 - 10$$

$$\lg k = 2.1195135$$

$$7.2394506 - 10$$

$$\lg m = 4.4789012 - 10, \quad m = \frac{1}{331970} \text{ als Masse der Erde.}$$

Um die Sache zu verallgemeinern und überhaupt einen Ausdruck für die Masse eines Planeten, der einen Mond besitzt, zu gewinnen, substituieren wir in der aufgestellten Proportion für k_e^2 und k^2 die in der vorangehenden Anmerkung gegebenen allgemeinen Werte; es ist nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors $4\pi^2$

$$\frac{a'^3}{U'(1 + m')} : \frac{a^3}{U^2(1 + m)} = m : 1$$

wo also das erste Glied die drei Elemente der Mondbahn, die Erde als Centralkörper gedacht, das zweite Glied die drei Elemente der Erdbahn, die Sonne als Centralkörper betrachtet, enthält; m' ist die Masse des Mondes im Verhältnis zu der der Erde, m die Masse der Erde, in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückt. Das erste Glied der Proportion (mit $4\pi^2$ multipliciert) bedeutet die Anziehungskraft der Erde, das zweite die Anziehungskraft der Sonne; wir können uns hier $a = a'\lambda$ wie früher gesetzt denken und beziehen so die Wirksamkeit beider Kräfte auf die Entfernung $a' = 1$; durch eine kleine Umformung erhalten wir

$$U^2(1 + m) : U'^2(m + mm') = a^3 : a'^3$$

Drückt man die Masse des Mondes in Einheiten der Sonnenmasse aus und setzt demzufolge $m = mm'$, so wird

$$U^2(1 + m) : U'^2(m + m) = a^3 : a'^3$$

ein Gesetz, welches schon in Newtons Principien III. 10 angedeutet ist. Daraus findet man

$$\frac{m + m}{1 + m} = \left(\frac{U}{U'}\right)^2 \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^3$$

Bezeichnet man mit π_s die Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne und mit π_m die des Mondes, so ist, wie leicht zu beweisen ist, $\pi_s : \pi_m = a' : a$; weil ferner $1 + m$ von der Einheit um äusserst wenig abweicht, so lässt sich mit hinreichender Genauigkeit sagen:

$$m + m = m(1 + m') = \left(\frac{U}{U'}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi_s}{\pi_m}\right)^3$$

Man bekommt also die vereinte Erd- und Mondmasse als ein zusammengehöriges Ganzes in einem; es ist aber leicht einzusehen, dass die Sicherheit des Resultates gar sehr abhängt von der Genauigkeit des Verhältnisses zwischen den beiden Parallaxen. Nimmt man $\pi_s = 8.81''$, $\pi_m = 57' 2.06''$ an, so erhält man

$$m + m = m(1 + m') = \frac{1}{327909}$$

Es sei dann $m' = \frac{1}{80}$, so wird

$$m = \frac{1}{327909} \cdot \frac{80}{81} = \frac{1}{332008}$$

Unter den gegebenen Annahmen erhält man folglich als Masse der Erde rund

$$m = \frac{1}{332000}$$

8.

Die Gleichung der Bahn

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \dots\dots\dots 1)$$

setzt uns in den Stand, für jeden Polarwinkel v , welcher in unserem Problem die wahre Anomalie genannt wird, den dazu gehörigen Radiusvector r oder die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne zu berechnen; die wahre Anomalie ist aber eine von der Zeit

abhängige Grösse. Es ist nach allgemein gebräuchlicher Annahme $v = 0$ zur Zeit, wann der Himmelskörper der Sonne am nächsten zu stehen kommt oder wenn er im Perihel (Sonnennähe), d. i. im Punkte π (Fig. 1), sich befindet; in diesem Falle wird also, weil $v = 0$ ist,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e)$$

als Minimum. Befindet sich der Himmelskörper am entgegengesetzten Ende seiner Bahn oder in demjenigen Punkte, wo er von der Sonne am weitesten absteht, welche Stelle das Aphel (Sonnenferne) genannt wird, so ist $v = 180^\circ$ und

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e)$$

als Maximum. Die Verbindungslinie zwischen Perihel und Aphel wird Apsidenlinie genannt und ist daher einerlei mit der grossen Achse $2a$ der Ellipse, denn $a(1 - e) + a(1 + e) = 2a$.

Für $v = 90^\circ, 270^\circ$ wird $r = a(1 - e^2) = p$ dem halben Parameter.

Um nun v für jeden beliebigen Augenblick der Umlaufszeit bestimmen zu können, müssen wir v durch t ausdrücken, d. i. durch die Anzahl der Tage, die seit der Perihelzeit, die wir mit T_0 bezeichnen wollen, verflossen sind. Bedeutet nämlich T irgend ein Datum, an welchem die wahre Anomalie v beträgt, so ist $t = T - T_0$ bei rechtläufiger und $t = T_0 - T$ bei rückläufiger Bewegung. Es ist aber zufolge 2) Art. 5 und 1) Art. 7

$$r^2 dv = k \sqrt{p(1 + m)} dt \quad \dots \dots \dots 2)$$

Damit die Differentialgleichung nur solche Veränderliche enthalte, die im Differentiale vorkommen, so drücken wir hier mit Zuhilfenahme von 1) r durch v aus, dann wird

$$\frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{k \sqrt{(1 + m)}}{p^{3/2}} dt \quad \dots \dots \dots 3)$$

Dies ist demnach die massgebende Differentialgleichung, die zur Integration kommt. — Für

a) die Bewegung im Kreise

fällt diese Integration sehr einfach aus, denn ist $e = 0$, so wird $r = p = a$; bedeutet daher a den Radius eines Kreises, so hat man

$$dv = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}} dt, \quad \text{also} \quad v' - v = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}} (t' - t) \dots 4)$$

Die Bewegung im Kreise ist somit eine gleichförmige. — Für

b) die Bewegung in der Ellipse

wo e zwischen den Grenzen 0 und 1 eingeschlossen ist, lässt sich 3) nicht unmittelbar integrieren, sondern erst nach Einführung eines Hilfswinkels. Weil der obigen Auseinandersetzung gemäss in einer Ellipse der Radiusvector r im Minimum $a(1 - e)$, im Maximum $a(1 + e)$ wird, so ist es gewiss erlaubt, allgemein anzunehmen

$$r = a(1 - e \cos E) \dots \dots \dots 5)$$

wobei dann ebenfalls für $E = 0$ der Radiusvector das besagte Minimum und für $E = 180^\circ$ das besagte Maximum erreicht und die Verbindungslinie der beiden Orte die Apsidenlinie bleibt; der Scheitel dieses neuen Winkels E liegt daher in der Apsidenlinie. Um die Lage desselben noch genauer zu ermitteln, nehmen wir $E = 90^\circ$ an und bestimmen die Länge des auf der grossen Achse senkrecht stehenden, bis an den Umfang der Ellipse reichenden einen Schenkels von E ; in diesem Falle ist also $r = a$ und infolge davon $1 - e^2 = 1 + e \cos v$ oder $\cos v = -e$. Im rechtwinkligen Dreiecke, welches zur Hypothenuse a , den Schenkel x zu einer und $a \cos(180 - v) = -a \cos v = ae$ zur anderen Kathete hat, ist nun

$$a^2 = x^2 + a^2 e^2, \quad \text{also} \quad x^2 = a^2(1 - e^2) = b^2$$

Demnach ist dieser auf der grossen Achse senkrecht stehende Schenkel x die kleine Halbachse selbst und der Scheitel des Winkels E im Mittelpunkte der Ellipse gelegen, weshalb er auch excentrische Anomalie (Anomalie aus dem Centrum) heisst. Statt 3) wird nun, wenn in 2) für r^2 aus 5) substituiert wird,

$$a^2(1 - e \cos E)^2 dv = k\sqrt{p(1 + m)} dt$$

Um integrieren zu können, muss jetzt auch dv durch dE ausgedrückt werden; es ist aber vermöge 1) und 5)

$$1 - e^2 = (1 + e \cos v)(1 - e \cos E)$$

Löst man diese Gleichung nach $\cos v$ auf, so kommt

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \dots\dots\dots 6)$$

Bildet man daraus $1 - \cos v$ und $1 + \cos v$, so ergibt sich vermittelst Division

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \dots\dots\dots 7)$$

Differenziert man diese Gleichung in Hinsicht auf die beiden Veränderlichen v und E , so kommt

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} dE \dots\dots\dots \text{für 7)}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes von dv gestaltet sich die obige Differentialgleichung zu der folgenden

$$a^2(1 - e \cos E) \sqrt{1 - e^2} dE = k \sqrt{p(1+m)} dt$$

Bedenkt man, dass $p = a(1 - e^2)$ ist und integriert, so erhält man

$$E - e \sin E = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{3/2}} t = M \dots\dots\dots 8)$$

Will man E und M im Winkelmasse ausgedrückt haben, so verwandle man e und k in Secunden (sieh Art. 7). Weil der Winkel M nun gerade so bestimmt wird, wie bei einer Kreisbewegung, so nennt man ihn die mittlere Anomalie und den Betrag

$$\mu = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{3/2}} \dots\dots\dots 9\alpha)$$

die mittlere tägliche Bewegung. Weil bei einer ganzen Umdrehung des Himmelskörpers um die Sonne $t = U$, $M = 360^\circ$ wird, so hat man auch zufolge 8)

$$\mu = \frac{360^\circ}{U} \dots\dots\dots 9\beta)$$

wie wir gleich eingangs diese mittlere tägliche Bewegung bestimmt haben. Auch aus 3) Art. 7 erhalten wir dieselben Ausdrücke für μ , nämlich

$$\mu = \frac{2\pi}{U} = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$$

aus welcher Gleichung sich a finden lässt, wenn U bekannt ist, wie dies bei Bestimmung von Kometenbahnen in Anwendung kommen wird.

Um daher die wahre Anomalie v für die Zeit t zu berechnen, bestimme man vor allem $M = \mu t$, indem man die seit der Perihelzeit verflossenen Tage mit der mittleren täglichen Bewegung multipliciert. Von der mittleren Anomalie gehe man dann über auf die excentrische vermittelt der sogenannten Kepler'schen Gleichung:

$$M = E - e \sin E 10)$$

Für die numerische Berechnung von E aus der vorliegenden Formel gibt es mehrere Vorschriften; bei geringen Excentricitäten, wie sie bei Planetenbahnen vorkommen, geschieht diese Berechnung von E noch am einfachsten auf indirectem Wege, indem man im ersten Versuche auf der rechten Seite der Gleichung

$$E = M + e \sin E$$

$E = M$ setzt; mit dem so gefundenen E wird der Versuch wiederholt und das Verfahren so lange fortgesetzt, bis E sich nicht mehr ändert; je kleiner e , desto rascher die Convergenz. Sind E und M im Winkelmasse ausgedrückt, so bringe man auch e auf Secunden, indem man es mit $206264 \cdot 8$, dessen Logarithmus $5 \cdot 3144251$ ist, multipliciert.

Ist E berechnet, so findet man die wahre Anomalie v dann aus 7); behufs bequemer logarithmischer Rechnung gibt man dieser Formel gewöhnlich eine andere Gestalt; setzt man nämlich

$$e = \sin \varphi 11)$$

so wird, weil $\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$ ist,

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{E}{2} 12)$$

Bei Kometenbahnen, deren Ellipsen eine bedeutende Excentricität besitzen, bewirkt das obige indirecte Verfahren für die Berechnung von E eine sehr langsame Convergenz, daher es in diesem Falle unbrauchbar wird. Allein bei langgestreckten Ellipsen ist der in der Nähe des Perihels befindliche Bogen von einer Parabel fast gar nicht verschieden, wie wir weiter unten dies beweisen werden. Für die Zeit der Sichtbarkeit der Kometen, welche Zeit eben in die Nähe des Perihels fällt, kann man demnach, ohne einen namhaften Fehler zu begehen, die Kometenbahnen als Parabeln ansehen und die Berechnung der einzelnen Orte darnach einrichten. — Für

c) die Bewegung in der Parabel

übergeht aber die Differentialgleichung 3), weil $e = 1$ wird, in

$$\frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{p^{3/2}} dt$$

Nun ist

$$\frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{2d\frac{v}{2}}{4\cos^4\frac{v}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}} \cdot \frac{d\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right) d\operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

daher

$$d\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2} d\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{2k\sqrt{1+m}}{p^{3/2}} dt$$

Vermittelst Integration bekommt man

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = \frac{2k\sqrt{1+m}}{p^{3/2}} t \dots\dots\dots 13)$$

Um diese cubische Gleichung auflösen zu können, setze man auf Grund der kardanischen Formel

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{p^{3/2}}{3kt\sqrt{1+m}}, \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}, \text{ so ist } \operatorname{tg}\frac{v}{2} = 2\cotg 2\omega \dots\dots 14)$$

Da die heliocentrische Bewegung der Kometen in der Nähe des Perihels ausserordentlich gross ist und oft in zwei Monaten nahe an 300° beträgt, so bleiben für die übrige Umlaufszeit der wahren Anomalie nur mehr wenige Grade übrig, für welche einzeln, wenn einmal die elliptischen Bahnelemente der Kometen genau bekannt geworden sind, man aus der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

die entsprechenden excentrischen und daraus mit Benützung von 10) die mittleren Anomalien rechnen kann; aus 8) ergeben sich dann die dazu gehörigen Zeiten. Auf diese Art findet man die heliocentrischen, und wenn man will, dann auch die geocentrischen Orte für die Zeiten, wo die Annahme einer parabolischen Bewegung nicht erlaubt ist. Zwischenpositionen lassen sich vermittlest Interpolation bestimmen.

9.

Ist auf die angegebene Weise bei einem Planeten oder Kometen die wahre Anomalie v ermittelt worden, so ergeben sich die übrigen heliocentrischen Grössen auf folgendem Wege. Aus 5) des vorigen Artikels hat man für den Radiusvector oder die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne

$$r = a(1 - e \cos E) \dots\dots\dots 1)$$

Für den parabolischen Theil der Kometenbahnen erhält man aus 1) des vorigen Artikels, wenn $e = 1$ gesetzt wird,

$$r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{v}{2}} \dots\dots\dots 2)$$

Weiters ist in allen Fällen

$$u = \pi + v - \Omega \dots\dots\dots 3)$$

Aus 2) in I. 1 folgt jetzt

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \operatorname{tg} u \cos i \dots\dots\dots 4)$$

Um den Quadranten von $(l - \Omega)$ zu treffen, achte man wohl, welche Vorzeichen für $\sin(l - \Omega)$ und $\cos(l - \Omega)$ aus 2) in I. 1 resultieren.

$$\operatorname{tg} b = \sin(l - \Omega) \operatorname{tg} i \dots\dots\dots 5)$$

Von den heliocentrischen Coordinaten r, l, b gehe man nun über auf die geocentrischen λ, β, A vermittelt der in I. 2 entwickelten Formeln:

$$\operatorname{tg}(\lambda - l) = \frac{R \sin(L - l)}{r \cos b + R \cos(L - l)} \dots\dots\dots 6\alpha)$$

oder wenn $r \cos b < R$ sein sollte:

$$\operatorname{tg}(L - \lambda) = \frac{r \cos b \sin(L - l)}{R + r \cos b \cos(L - l)} \dots\dots\dots 6\beta)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(L - \lambda)}{\sin(L - l)} \operatorname{tg} b \dots\dots\dots 7)$$

Aus 8) in I. 2 hat man zuletzt

$$A^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos b \cos(L - l) \dots\dots\dots 8)$$

womit die Berechnung des einzelnen Ortes zu Ende geführt ist.

Damit der Einfluss, welchen Fehler oder Aenderungen in den heliocentrischen Coordinaten auf die geocentrischen ausüben, ersichtlich werde, mögen hier noch die Differentialformeln für 6) und 7) Platz finden. Es ist

$$d\lambda = -\frac{\cos b \sin(\lambda - l)}{q} dr + \frac{r \cos b \cos(\lambda - l)}{q} dl + \frac{r \sin b \sin(\lambda - l)}{q} db$$

$$d\beta = \sin 2\beta \left[\frac{dl}{2\operatorname{tg}(L - l)} + \frac{db}{\sin 2b} - \frac{d\lambda}{2\operatorname{tg}(L - \lambda)} \right]$$

Diese zwei Formeln leisten auch der Störungsrechnung gute Dienste, da man vermittelst derselben die Störungen in den beobachteten Längen und Breiten berechnen kann, wenn einmal die Störungen in den heliocentrischen Orten bekannt geworden sind (sich VI. 3 am Schlusse).

10.

Zur Berechnung eines einzelnen Ortes benöthigen wir demnach sechs Constanten: 1) π , die Länge des Perihels, womit die Lage der Apsidenlinie bestimmt ist; 2) Ω , die Länge des aufsteigenden Knotens; 3) i , die Neigung der Bahn; 4) a , die grosse Halbachse oder statt derselben p , den halben Parameter; 5) e , die Excentricität und 6) T_0 , die Zeit, wann der Himmelskörper im Perihel stand. Anstatt dieser Zeit, die den Ausgangspunkt für die Zählung der Tage bildet, kann aber auch ein anderer Zeitpunkt gewählt werden, wenn demselben die entsprechende mittlere Anomalie beigefügt wird, oder mit anderen Worten, es muss in der Formel

$$M = \frac{kt \sqrt{1 - e^2}}{a^{3/2}} = \mu t = \mu(T - T_0)$$

zu einem bestimmten Datum T auch die entsprechende mittlere Anomalie M gegeben sein, damit aus der Gleichung

$$M = \mu(T - T_0) \dots \dots \dots \alpha)$$

T_0 gefunden werden kann. Diese durch T gegebene Zeit nennt man Epoche. In den Büchern und Tafeln, wo die Bahnelemente für die verschiedenen Planeten und Kometen zusammengestellt sind, findet man häufig für eine bestimmte Epoche T die mittlere Länge $\pi + M$ angegeben, von welcher Länge man also die Perihellänge π abzuziehen hat, um die entsprechende mittlere Anomalie M zu finden. Es ist

aber nicht nothwendig, T_0 aus α) zu rechnen; denn es bezeichne T_x eine beliebige Zeit, die von der Epoche T um viele Jahre verschieden sein kann, und M_x die dazu gehörige mittlere Anomalie, so ist analog wie in α)

$$M_x = \mu(T_x - T_0) \dots \dots \dots \beta)$$

Subtrahiert man α) von β), so ergibt sich

$$M_x = M + \mu(T_x - T) \dots \dots \dots 1)$$

woraus man für eine jede beliebige Zeit die mittlere Anomalie berechnen kann. Sollte der Zeitunterschied $T_x - T$ grösser sein als die Umlaufszeit des Planeten, so bringe man die letztere einfach davon in Abzug.

Zu den genannten sechs Elementen der Bahn gesellt sich zuletzt noch die Masse m des Himmelskörpers, welche, namentlich wenn sie bedeutend ist, berücksichtigt werden muss, weil sie die mittlere tägliche Bewegung μ beeinflusst. Bei den kleinen Planeten und Kometen wird die Masse vernachlässigt, weil sie wegen ihrer Kleinheit in Hinsicht auf die Sonnenmasse in der Rechnung verschwindet.

11.

Die nach den Formeln im Art. 9 berechnete geocentrische Länge und Breite bezieht sich auf das mittlere Aequinoctium, für welches die Elemente Ω , i , π gelten; will man nun daraus die scheinbare (wirkliche) Position ableiten, um sie vielleicht mit der Beobachtung vergleichen zu können, so füge man zur berechneten Länge λ die Präcession für die Zwischenzeit und die für dieselbe Zeit stattfindende Nutation hinzu; die Präcession rechne man nach der in I. 4 gegebenen Vorschrift, die Nutation aber aus der Formel

$$\Delta\lambda = -17.25 \sin \Omega_m$$

wo Ω_m die Länge des aufsteigenden Mondknotens bezeichnet, welche Grösse man in den Ephemeriden angegeben findet oder den Mondtafeln entnehmen kann.

Die so corrigierte geocentrische Länge und unveränderte Breite werden jetzt mit Hilfe der scheinbaren Schiefe der Ekliptik $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ in Rectascension und Declination verwandelt. Man findet $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ ebenfalls in den Ephemeriden angegeben, kann aber diese Grösse auch

selbst berechnen, indem man zuerst ε aus I. 4 für die betreffende Zeit bestimmt und den Betrag für die Nutation

$$\Delta\varepsilon = + 9.22 \cos \Omega_m$$

hinzufügt, wo Ω_m die Länge des Mondknotens wie oben bezeichnet.

Für die Verwandlung der Länge und Breite λ, β in Rectascension und Declination α, δ erhält man aus dem sphärischen Dreiecke zwischen den beiden Polen des Aequators und der Ekliptik und dem Gestirn folgende Fundamentalformeln:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \delta &= \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \delta &= \sin \lambda \cos \beta \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \\ \sin \delta &= \sin \lambda \cos \beta \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon \end{aligned}$$

wo ε allgemein die Schiefe der Ekliptik bezeichnet; in unserem Falle haben wir uns darunter die scheinbare Schiefe zu denken. Behufs bequemer logarithmischer Rechnung setze man

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} N &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda}, \text{ dann wird} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\cos(N + \varepsilon)}{\cos N} \operatorname{tg} \lambda, \quad \operatorname{tg} \delta = \sin \alpha \operatorname{tg}(N + \varepsilon) \end{aligned}$$

Auf diese oder eine doch sehr ähnliche Weise werden die in den grossen Ephemeriden (Nautical Almanac, Berliner Jahrbuch und andere) angegebenen scheinbaren (apparentes) Rectascensionen und Declinationen der beweglichen Gestirne gerechnet; bei den Planeten genügt es, diese Rechnung für Intervalle von vier zu vier Tagen zu führen, die Zwischenpositionen aber durch Interpolation zu bestimmen.

12.

Unsere Beobachtungen der Himmelskörper geben ebenfalls scheinbare Rectascensionen und Declinationen, aber dieselben sind mit Parallaxe und Aberration behaftet; will man daher eine Beobachtung mit der berechneten Ephemeride vergleichen, so muss man die erstere vor allen von der Parallaxe befreien; dies geschieht auf folgende Weise. Bedeuten α, δ die geocentrische, α', δ' die beobachtete Rectascension und Declination des Gestirnes, ϑ die Ortssternzeit der Beobachtung, φ' die geocentrische oder verbesserte Pol-

höhe des Ortes, π die momentane auf den Ort reducierte Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe des Gestirnes, so ist für alle Gestirne, mit Ausnahme des Mondes, hinlänglich genau

$$\alpha = \alpha' + \frac{\pi \cos \varphi' \sin(\vartheta - \alpha)}{\cos \delta}, \quad \delta = \delta' + \frac{\pi \sin \varphi' \sin(\gamma - \delta)}{\sin \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos(\vartheta - \alpha)}$$

Die momentane auf den Ort reducierte Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe π des Gestirnes ergibt sich aus folgender Betrachtung. Ist ϱ der wirkliche Erdhalbmesser für den Beobachtungsort, Δ die wirkliche Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunkte der Erde, b der Aequatorhalbmesser der Erde, a die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde, d. i. die von uns oben angenommene Längeneinheit für die am Himmel vorkommenden Entfernungen, so ist

$$\sin \pi = \frac{\varrho}{\Delta} = \frac{\varrho}{b} \cdot \frac{b}{\Delta} = \frac{\varrho_0}{\Delta_0} \sin \Pi_s$$

Hier wurde gesetzt $\varrho : b = \varrho_0$, d. i. der in Einheiten von b ausgedrückte Erdhalbmesser des Beobachtungsortes; $b : a = \sin \Pi_s$, wo Π_s die Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne (gegenwärtig zu $8.81''$ angenommen) bezeichnet; $\Delta : a = \Delta_0$ die in Einheiten von a ausgedrückte Entfernung des Gestirnes von der Erde, die sonst einfach mit Δ bezeichnet wird. Wegen der Kleinheit der Winkel π und Π_s (welche Buchstaben in diesem Artikel also eine abgesonderte Bedeutung haben) kann man sagen:

$$\pi = \frac{\varrho_0 \Pi_s}{\Delta_0}$$

Demnach ist $\frac{\pi \Delta_0}{\varrho_0} = \Pi_s$ eine Constante; bezeichnen wir daher mit π' , Δ'_0 und ϱ'_0 die betreffenden Grössen für ein anderes Gestirn und einen anderen Erdort, so ist

$$\Delta \pi \varrho'_0 = \Delta' \pi' \varrho_0$$

für einen und denselben Erdort ist $\varrho_0 = \varrho'_0$, daher die Proportion

$$\pi : \pi' = \Delta' : \Delta$$

es verhalten sich demnach für einen Erdort die Parallaxen zweier Gestirne wie umgekehrt die Entfernungen derselben von der Erde.

Ist nun die Beobachtungszeit t (ausgedrückt in mittlerer Zeit), so vermindere man dieselbe um die Lichtzeit und setze also

$$T = t - 497^{\text{sec.}} \Delta_0$$

Für diese Zeit T bestimme man aus der Ephemeride vermittelst Interpolation α , δ und vergleiche diese beiden Grössen mit der zur Zeit t beobachteten und von der Parallaxe befreiten Rectascension und Declination des Gestirnes, so gibt der Unterschied Beobachtung weniger Rechnung den Fehler der Ephemeride zur Zeit T .

III. Abschnitt.

Bahnbestimmung.

1.

Jetzt behandeln wir die umgekehrte, um vieles schwierigere Aufgabe, wie man aus den Beobachtungen eines Himmelskörpers die sechs Elemente seiner Bahn ableiten kann, denn das siebente Element, die Masse desselben, lässt sich auf diesem Wege nicht finden, sondern muss anderswoher bekannt sein.

Die Beobachtungen unmittelbar geben, wie bemerkt, scheinbare mit Parallaxe und Aberration behaftete Rectascensionen und Declinationen; wie man die Parallaxe wegbringt, ist bereits gezeigt worden. Weil dennoch die Entfernung des Himmelskörpers bei ersten Bahnbestimmungen noch nicht bekannt ist, so wird man diese Correction auf eine spätere Zeit verschieben, wo die Distanzen schon nahezu richtig ermittelt sind; besitzt man aber bereits genäherte Bahnelemente, so lässt sich die Parallaxe sofort berechnen und an die Beobachtungen anbringen. Die so corrigierten oder auch nicht corrigierten Rectascensionen und Declinationen α , δ werden dann mit Hilfe der scheinbaren Schiefe der Ekliptik $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ in Längen und Breiten λ , β verwandelt, wenn die Ekliptik als Fundamentalebene angenommen wird. Für diese Verwandlung ergeben sich aus dem früher erwähnten sphärischen Dreiecke folgende Fundamentalformeln:

$$\begin{aligned}\cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon\end{aligned}$$

Behufs bequemer logarithmischer Rechnung setze man

$$\begin{aligned}tg \nu &= \frac{\sin \alpha}{tg \delta}, \text{ dann wird} \\ tg \lambda &= \frac{\sin(\nu + \varepsilon)}{\sin \nu} tg \alpha, \quad tg \beta = \sin \lambda \cotg(\nu + \varepsilon)\end{aligned}$$

Die so erhaltenen Längen und Breiten befreit man von der Fixsternaberration; sind nämlich λ, β die wahren, λ', β' die von der Fixsternaberration afficierten Längen und Breiten, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned}\lambda - \lambda' &= 20 \cdot 445'' \cos(L - \lambda) \sec \beta \\ \beta - \beta' &= 20 \cdot 445'' \sin(L - \lambda) \sin \beta\end{aligned}$$

Zuletzt bringt man noch die Nutation in Abzug und bezieht durch Anfügung der Präcession alle Beobachtungen auf ein gemeinschaftliches Aequinoctium. Die beobachteten Zeiten vermindert man um die Lichtzeit $497^{\text{sec}} \cdot \Delta_0$, was aber, wie bei der Parallaxe, erst dann geschehen kann, wenn die Distanzen wenigstens annähernd bekannt geworden sind. — Dies sind in Kürze die Correctionen, die man an die Beobachtungen anzubringen hat, um dieselben für die Bahnbestimmung geeignet zu machen.

2.

Die auf Null reducierte Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gehenden Ebene, wie wir sie im II. Abschnitte, Art. 2 bereits kennen gelernt haben, lautet:

$$xy'z'' - xy''z' + x'y''z - x'yz'' + x''yz' - x''y'z = 0 \dots 1)$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochenen Bedingung müssen also die rechtwinkligen Coordinaten dreier im Raume befindlichen Punkte genügen, sollten diese Punkte in einer und derselben durch den Coordinatenanfang gehenden Ebene liegen; dieser Cardinalforderung müssen daher auch drei verschiedene Orte eines Himmelskörpers Folge leisten, wenn man dieselben durch die rechtwinkligen Coordinaten ausdrückt und den Mittelpunkt der Sonne als Coordinatenanfang annimmt. Die vorliegende Gleichung 1) drückt uns demnach die Beziehung aus, in welcher drei beobachtete Orte eines Planeten oder Kometen unter einander stehen, und unsere Aufgabe wird es sein, zuzusehen, ob wir nicht durch Einsetzung der aus drei Beobachtungen hervorgehenden Daten in dieselbe zu irgend welchem Ziele gelangen können. Es seien demnach nach Anbringung aller nothwendigen Correcturen $\lambda, \beta; \lambda', \beta'; \lambda'', \beta''$ die den drei Beobachtungszeiten t, t', t'' entsprechenden geocentrischen Längen und Breiten des Planeten oder Kometen, $R, R', R''; L, L', L''$ die entsprechenden drei Entfernungen und geocentrischen Längen der Sonne, wie sie den Ephemeriden entnommen werden können. Würden nebstbei auch die Distanzen $\Delta, \Delta', \Delta''$ oder ihre Projectionen auf die Ekliptik q, q', q'' irgendwoher gegeben sein, so wäre es zufolge der

Formeln in I. 2 ein leichtes, die heliocentrischen Polarcoordinaten $r, l, b; r', l', b'; r'', l'', b''$ und daraus die Bahnelemente selbst zu berechnen, wie weiter unten gezeigt werden wird; allein die Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ können nicht unmittelbar gemessen werden, sondern man muss dieselben erst durch Rechnung finden, ähnlich wie bei einer Feldmessung die Entfernung zweier Punkte, von denen nur einer zugänglich ist, berechnet wird. Dabei benötigt man bekanntlich einer Standlinie und zweier anliegender Winkel, welche drei Grössen durch unmittelbare Messung gefunden werden. Diese Standlinie stellt uns in Fig. 3 die $ES = R$, die Verbindungslinie zwischen Sonne und Erde, vor; von den beiden anliegenden Winkeln ist aber nur der an der Erde befindliche bekannt, die zwei übrigen Winkel des einen oder des andern Dreieckes hingegen sind völlig unbekannt, durch welchen Umstand das Problem der Bahnbestimmung eben sehr erschwert wird. Die Geometrie des Himmels würde auch ganz erfolglos bleiben, wenn nicht die im II. Abschnitte dargelegten Gesetze für die Bewegung der Himmelskörper bekannt wären, und es kommen daher bei der Bahnbestimmung auch nicht die erwähnten Dreiecke in Betracht, sondern diejenigen, welche der Himmelskörper bei seiner Bewegung um die Sonne von einem Orte zum andern beschreibt und welche sämtlich einen gemeinschaftlichen Eckpunkt im Mittelpunkte der Sonne besitzen; diese Dreiecke lassen sich nämlich, wenn auch nicht so einfach wie die betreffenden Sectorflächen, als Functionen der Zwischenzeiten darstellen und werden so für die Lösung der Aufgabe überaus nützlich.

Wir nehmen also der Gleichung 1) zufolge drei beobachtete Orte eines Planeten oder Kometen an, und es seien in dem durch den Mittelpunkt der Sonne gelegten Coordinatensysteme, welches wir im I. Abschnitte näher beschrieben haben, $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ die rechtwinkligen Coordinaten der drei Orte P, P', P'' im Raume und 1) die Gleichung der Bahnebene des Himmelskörpers; diese Gleichung lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$z(x'y'' - x''y') - z'(xy'' - x''y) + z''(xy' - x'y) = 0. \dots 2)$$

Die eingeklammerten Ausdrücke stellen sich uns bei näherer Betrachtung als lauter Doppeldreiecke oder Parallelogramme dar, die in der xy - oder Ekliptikebene liegen, und zwar sind dies die Ekliptikprojectionen der drei doppelten Raumdreiecke $r'r'' \sin(v'' - v) = n$, $rr'' \sin(v'' - v) = n'$, $rr' \sin(v' - v) = n''$, welche durch die drei Orte des Himmelskörpers und den Mittelpunkt der Sonne gebildet werden; drücken wir diese Projectionen durch die heliocentrischen Polar-

coordinaten r, l, b aus 1 β) in I. 2 aus, so ist mit gehöriger Berücksichtigung der Accente

$$\begin{aligned}x'y'' - x''y' &= r'r'' \cos b' \cos b'' \sin(l'' - l') \\xy'' - x''y &= rr'' \cos b \cos b'' \sin(l'' - l) \\xy' - x'y &= rr' \cos b \cos b' \sin(l' - l)\end{aligned}$$

Setzen wir dies in 2) ein und bedenken, dass $z = r \sin b$, $z' = r' \sin b'$, $z'' = r'' \sin b''$, so erhalten wir vermittlest Division mit $\cos b \cos b' \cos b''$

$$tg b \sin(l'' - l') - tg b' \sin(l'' - l) + tg b'' \sin(l' - l) = 0 \dots 3)$$

welche Beziehung also bei drei Orten eines und desselben Himmelskörpers stattfinden muss. Da die Distanzen r, r', r'' ganz verschwinden, so drückt uns die vorstehende Gleichung eine sphärische Beziehung der drei Orte aus, d. i. eine Beziehung, wie sie auf der Oberfläche einer Kugel stattfindet; die drei Orte müssen daher, vom Mittelpunkte der Sonne aus betrachtet, in einem grössten Kreise liegen, was natürlich so zu verstehen ist, dass r, r', r'' einen aus dem Mittelpunkte der Sonne mit beliebigem Radius beschriebenen, in der Bahnebene liegenden Kreis durchschneiden müssen.

Wir können aber die erwähnten Projectionsdreiecke auch durch die geocentrischen Polarcoordinaten aus 1 β) in I. 2 ausdrücken, dann wird

$$\begin{aligned}x'y'' - x''y' &= \\&= \rho'\rho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'\rho'' \sin(L' - \lambda'') - R''\rho' \sin(L'' - \lambda') + R'R'' \sin(L'' - L') \\xy'' - x''y &= \\&= \rho\rho'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R\rho'' \sin(L - \lambda'') - R''\rho \sin(L'' - \lambda) + RR'' \sin(L'' - L) \\xy' - x'y &= \\&= \rho\rho' \sin(\lambda' - \lambda) + R\rho' \sin(L - \lambda') - R'\rho \sin(L' - \lambda) + RR' \sin(L' - L)\end{aligned}$$

welche Ausdrücke sehr durchsichtig gebaut sind und wovon jeder eine Constante, nämlich das von der Erde in der betreffenden Zwischenzeit beschriebene doppelte Dreieck enthält. Substituieren wir dies in 2) und setzen auch für z, z', z'' die entsprechenden Werte $\rho tg \beta$, $\rho' tg \beta'$, $\rho'' tg \beta''$ ein, so wird, wenn der Kürze halber $R'R'' \sin(L'' - L') = N$, $RR'' \sin(L'' - L) = N'$, $RR' \sin(L' - L) = N''$ gesetzt wird, nach leichter Reduction

$$\begin{aligned}\rho\rho'\rho''[tg \beta \sin(\lambda'' - \lambda') - tg \beta' \sin(\lambda'' - \lambda) + tg \beta'' \sin(\lambda' - \lambda)] - \\- R\rho'\rho''[tg \beta' \sin(L - \lambda'') - tg \beta'' \sin(L - \lambda')] + \\+ R'\rho\rho''[tg \beta \sin(L' - \lambda'') - tg \beta'' \sin(L' - \lambda)] - \\- R''\rho\rho'[tg \beta \sin(L'' - \lambda') - tg \beta' \sin(L'' - \lambda)] + \\+ N\rho tg \beta - N'\rho' tg \beta' + N''\rho'' tg \beta'' = 0 \dots 4)\end{aligned}$$

Dies wäre schon eine Bedingungsgleichung für die Bestimmung der Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' , nur müsste man nebstbei das Verhältnis $\varrho : \varrho' : \varrho''$ kennen; es gäbe, nachdem ϱ' und ϱ'' durch ϱ ausgedrückt worden sind, eine quadratische Gleichung, welche zunächst ϱ , dann mittelbar auch ϱ' und ϱ'' liefern würde. Allein es gibt kein Mittel, um jenes Verhältnis der Distanzen direct zu bestimmen, weshalb wir die vorstehende Gleichung, der wir später eine bequemere Form geben werden, für andere Zwecke aufsparen.

Es hindert uns nun nichts, diese Projectionsdreiecke auch durch die in I. 3 entwickelten Ausdrücke zu ersetzen; wir erhalten analog wie in II. 4

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= r'r'' \sin(u'' - u') \cos i, & xy'' - x''y &= rr'' \sin(u'' - u) \cos i \\ xy' - x'y &= rr' \sin(u' - u) \cos i \end{aligned}$$

Setzen wir dies in 2) ein und bedenken, dass $z = r \sin i \sin u$, $z' = r' \sin i \sin u'$, $z'' = r'' \sin i \sin u''$ ist, so bekommen wir

$$\sin u \sin(u'' - u') - \sin u' \sin(u'' - u) + \sin u'' \sin(u' - u) = 0 \quad \dots 5\alpha)$$

welche Beziehung also zwischen drei beliebigen Winkeln u , u' , u'' stattfinden muss, die in ein und derselben Ebene liegen und einen gemeinschaftlichen Scheitel besitzen. Nun ist $u = \pi + v - \Omega$, $u' = \pi + v' - \Omega$, $u'' = \pi + v'' - \Omega$, daher wird, wenn man der Kürze halber $\pi - \Omega = \omega$ setzt,

$$\sin(\omega + v) \sin(v'' - v') - \sin(\omega + v') \sin(v'' - v) + \sin(\omega + v'') \sin(v' - v) = 0 \quad \dots 5\beta)$$

und weil ω alle möglichen Werte, also auch $90 + \omega$ annehmen kann,

$$\cos(\omega + v) \sin(v'' - v') - \cos(\omega + v') \sin(v'' - v) + \cos(\omega + v'') \sin(v' - v) = 0 \quad \dots 5\gamma)$$

Die in diesen drei Gleichungen enthaltenen Theoreme werden hie und da als Hilfen benützt und führen oft zu überraschenden Resultaten.

Bezeichnet man die Projectionsdreiecke der Ekliptikebene der Reihe nach mit ν , ν' , ν'' und setzt wie oben $n = r'r'' \sin(v'' - v')$, $n' = rr'' \sin(v'' - v)$, $n'' = rr' \sin(v' - v)$, so ist dem Vorangehenden gemäss

$$\begin{aligned} \nu &= x'y'' - x''y' = r'r'' \sin(v'' - v') \cos i = n \cos i \\ \nu' &= xy'' - x''y = rr'' \sin(v'' - v) \cos i = n' \cos i \\ \nu'' &= xy' - x'y = rr' \sin(v' - v) \cos i = n'' \cos i \end{aligned}$$

daraus erhellt erstens, dass die Projectionsdreiecke ν, ν', ν'' sich so zu einander verhalten, wie die entsprechenden Raumdreiecke n, n', n'' , denn es ist

$$\nu : \nu' : \nu'' = n : n' : n''$$

zweitens, dass die Gleichung 2) auch folgende Form annehmen kann:

$$nz - n'z' + n''z'' = 0 \dots\dots\dots 6)$$

Die Grundgleichung 1) lässt sich aber auch in folgender Form schreiben:

$$y(x'z'' - x''z') - y'(xz'' - x''z) + y''(xz' - x'z) = 0 \dots\dots 7)$$

Die eingeklammerten Ausdrücke sind, wie man allsogleich sieht, die den drei Raumdreiecken n, n', n'' entsprechenden drei Projectionsdreiecke der xz -Ebene; wir wollen dieselben auch durch die geocentrischen Polarcoordinaten aus 1 β) in I. 2 ausdrücken; wir erhalten

$$\begin{aligned} x'z'' - x''z' &= \rho'\rho''(tg\beta''\cos\lambda' - tg\beta'\cos\lambda'') + R''\rho'tg\beta'\cos L'' - R'\rho''tg\beta''\cos L' \\ xz'' - x''z &= \rho\rho''(tg\beta''\cos\lambda - tg\beta\cos\lambda'') + R''\rho'tg\beta\cos L'' - R\rho''tg\beta''\cos L \\ xz' - x'z &= \rho\rho'(tg\beta'\cos\lambda - tg\beta\cos\lambda') + R'\rho'tg\beta\cos L' - R\rho'tg\beta'\cos L \end{aligned}$$

Bezeichnet man diese Projectionsdreiecke der Reihe nach mit ν, ν', ν'' und ersetzt die rechtwinkligen Coordinaten durch die Ausdrücke in I. 3, so kommt

$$\begin{aligned} \nu &= x'z'' - x''z' = r'r''\sin(v'' - v')\cos\Omega\sin i = n\cos\Omega\sin i \\ \nu' &= xz'' - x''z = r r''\sin(v'' - v)\cos\Omega\sin i = n'\cos\Omega\sin i \\ \nu'' &= xz' - x'z = r r'\sin(v' - v)\cos\Omega\sin i = n''\cos\Omega\sin i \end{aligned}$$

Daraus ersieht man, dass auch diese Projectionsdreiecke sich so zu einander verhalten, wie die entsprechenden Raumdreiecke, denn es ist

$$\nu : \nu' : \nu'' = n : n' : n''$$

und die Gleichung 7) kann die Form annehmen:

$$ny - n'y' + n''y'' = 0 \dots\dots\dots 8)$$

Die Grundgleichung 1) der Bahnebene lässt sich drittens auch so schreiben:

$$x(y'z'' - y''z') - x'(yz'' - y''z) + x''(yz' - y'z) = 0 \dots\dots 9)$$

Die Ausdrücke in den Klammern sind augenscheinlich die den drei Raumdreiecken n, n', n'' entsprechenden drei Projectionsdreiecke

der yz -Ebene; ersetzen wir in denselben die rechtwinkligen Coordinaten durch die betreffenden geocentrischen Polarcoordinaten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y'z'' - y''z' &= \rho'\rho''(tg\beta''\sin\lambda' - tg\beta'\sin\lambda'') + R''\rho'tg\beta'\sin L'' - R'\rho''tg\beta''\sin L' \\ yz'' - y''z &= \rho\rho''(tg\beta''\sin\lambda - tg\beta'\sin\lambda'') + R''\rho'tg\beta'\sin L'' - R'\rho''tg\beta''\sin L \\ yz' - y'z &= \rho\rho'(tg\beta'\sin\lambda - tg\beta'\sin\lambda') + R'\rho'tg\beta'\sin L' - R\rho'tg\beta'\sin L \end{aligned}$$

Bezeichnen wir diese Projectionsdreiecke der Reihe nach mit $\nu_{''}$, $\nu_{''}'$, $\nu_{''}''$ und substituieren statt der rechtwinkligen Coordinaten die Ausdrücke in I. 3, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu_{''} &= y'z'' - y''z' = r'r''\sin(v'' - v')\sin\Omega\sin i = n\sin\Omega\sin i \\ \nu_{''}' &= yz'' - y''z = r'r''\sin(v'' - v)\sin\Omega\sin i = n'\sin\Omega\sin i \\ \nu_{''}'' &= yz' - y'z = r'r'\sin(v' - v)\sin\Omega\sin i = n''\sin\Omega\sin i \end{aligned}$$

Daraus sieht man, dass auch diese Projectionsdreiecke sich so zu einander verhalten, wie die betreffenden Raumdreiecke, denn es ist

$$\nu_{''} : \nu_{''}' : \nu_{''}'' = n : n' : n''$$

und die Gleichung 9) geht über in

$$nx - n'x' + n''x'' = 0 \dots\dots\dots 10)$$

3.

Fassen wir die so gewonnenen Resultate zusammen, so können wir erstens den Satz aussprechen, dass die vom Himmelskörper beschriebenen Raumdreiecke sich so zu einander verhalten, wie die entsprechenden, einerlei Coordinatenebenen angehörenden Projectionsdreiecke, oder in Zeichen:

$$\left. \begin{aligned} \nu : \nu' : \nu'' \\ \nu_1 : \nu_1' : \nu_1'' \\ \nu_{''} : \nu_{''}' : \nu_{''}'' \end{aligned} \right\} = n : n' : n'' \dots\dots\dots 1)$$

Zweitens gelangen wir zu der Gruppe von Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} nx - n'x' + n''x'' &= 0 \\ ny - n'y' + n''y'' &= 0 \\ nz - n'z' + n''z'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2)$$

welche die neue Grundlage unserer ferneren Auseinandersetzung bilden werden; dieselben entstammen ihrer Entwicklung zufolge alle drei der einzigen Grundgleichung 1) des vorigen Artikels, eine jede derselben ist ein verschiedener Ausdruck dieser Grundgleichung und sie sind keineswegs identisch. Auch ist es klar, dass in denselben statt

n, n', n'' eine beliebige der drei horizontalen Reihen von Projectionsdreiecken in 1) stehen könnte, ein Umstand, der uns in der Folge sehr zustatten kommen wird. Wir machen nun einen Schritt vorwärts und ersetzen in 2) die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten durch die entsprechenden geocentrischen aus 1β) in I. 2; so erhalten wir mit gehöriger Berücksichtigung der Accente folgende drei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von $\varrho, \varrho', \varrho''$

$$\left. \begin{aligned} n(\rho \cos \lambda - R \cos L) - n'(\rho' \cos \lambda' - R' \cos L') + n''(\rho'' \cos \lambda'' - R'' \cos L'') &= 0 \\ n(\rho \sin \lambda - R \sin L) - n'(\rho' \sin \lambda' - R' \sin L') + n''(\rho'' \sin \lambda'' - R'' \sin L'') &= 0 \\ n\rho \operatorname{tg} \beta - n'\rho' \operatorname{tg} \beta' + n''\rho'' \operatorname{tg} \beta'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 3)$$

Die ersten zwei Gleichungen lassen sich auch so darstellen:

$$\begin{aligned} n\rho \cos \lambda - n'\rho' \cos \lambda' + n''\rho'' \cos \lambda'' &= nR \cos L - n'R' \cos L' + n''R'' \cos L'' \\ n\rho \sin \lambda - n'\rho' \sin \lambda' + n''\rho'' \sin \lambda'' &= nR \sin L - n'R' \sin L' + n''R'' \sin L'' \end{aligned}$$

Wir nehmen vorläufig die Raumdreiecke n, n', n'' als bekannt an und setzen

$$\left. \begin{aligned} nR \sin L - n'R' \sin L' + n''R'' \sin L'' &= m \sin M \\ nR \cos L - n'R' \cos L' + n''R'' \cos L'' &= m \cos M \end{aligned} \right\} \dots 4)$$

woraus sich m und M (welche zwei Buchstaben hier also eine andere Bedeutung haben als im II. Abschnitte) auf eine unzweideutige Weise bestimmen lassen; da nämlich m immer positiv genommen werden kann, ebenso wie n, n', n'' , sobald es sich nur um die Dreiecksverhältnisse handelt, so hat man bloss auf die Vorzeichen im Zähler und Nenner des Ausdruckes für $\operatorname{tg} M$ zu achten, um den Quadranten von M zu treffen. Als Controle dienen die beiden aus 4) resultierenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} nR \sin(L - M) - n'R' \sin(L' - M) + n''R'' \sin(L'' - M) &= 0 \\ nR \cos(L - M) - n'R' \cos(L' - M) + n''R'' \cos(L'' - M) &= m \end{aligned} \right\} \dots 5)$$

Demnach ist auch

$$\left. \begin{aligned} n\varrho \sin \lambda - n'\varrho' \sin \lambda' + n''\varrho'' \sin \lambda'' &= m \sin M \\ n\varrho \cos \lambda - n'\varrho' \cos \lambda' + n''\varrho'' \cos \lambda'' &= m \cos M \end{aligned} \right\} \dots \dots 6)$$

und analog wie in 5)

$$\left. \begin{aligned} n\varrho \sin(\lambda - M) - n'\varrho' \sin(\lambda' - M) + n''\varrho'' \sin(\lambda'' - M) &= 0 \\ n\varrho \cos(\lambda - M) - n'\varrho' \cos(\lambda' - M) + n''\varrho'' \cos(\lambda'' - M) &= m \end{aligned} \right\} \dots \dots 7)$$

welche beiden Gleichungen sich uns später als nützlich erweisen werden, die wir aber der passenden Gelegenheit wegen gleich hier

vorführen. Nachdem wir so den ersten zwei Gleichungen in 3) die gefälligere und leichter zu handhabende Form 6) gegeben haben, wenden wir uns zur dritten Gleichung daselbst. Vor allen stellen wir zur Umgehung einer langwierigen analytischen Entwicklung folgende leichte geometrische Betrachtung an.

Es sei Fig. 5 $F\lambda\lambda'\lambda''$ ein Theil der Ekliptik, als grösster Kreis gedacht, deren Pol in E sich befindet; es sei ferner der Himmelskörper, dessen Bahn wir bestimmen wollen, in drei Orten P, P', P'' von der Erde aus beobachtet und aus diesen Beobachtungen nach Anbringung der nöthigen Correctionen die geocentrischen Längen $F\lambda = \lambda, F\lambda' = \lambda', F\lambda'' = \lambda''$ und die geocentrischen Breiten $P\lambda = \beta, P'\lambda' = \beta', P''\lambda'' = \beta''$ abgeleitet worden. Wir legen nun durch je zwei Orte die grössten Kreise $PP', PP'', P'P''$ und verlängern dieselben bis zu den Durchschnittspunkten K'', K', K mit der Ekliptik; die Winkel, die diese grössten Kreise mit der Ekliptik in einerlei Sinne einschliessen, seien: $\sphericalangle P'K\lambda'' = J, \sphericalangle PK'\lambda'' = J', \sphericalangle PK''\lambda'' = J''$, ferner setzen wir die vom Frühlingspunkte F aus gezählten Längen $FK = K, FK' = K', FK'' = K''$. Aus den bei λ rechtwinkligen sphärischen Dreiecken $P\lambda K'$ und $P\lambda K''$ folgt nun

$$\operatorname{tg} \beta = \sin(\lambda - K') \operatorname{tg} J' = \sin(\lambda - K'') \operatorname{tg} J'' \quad \dots \quad 8\alpha)$$

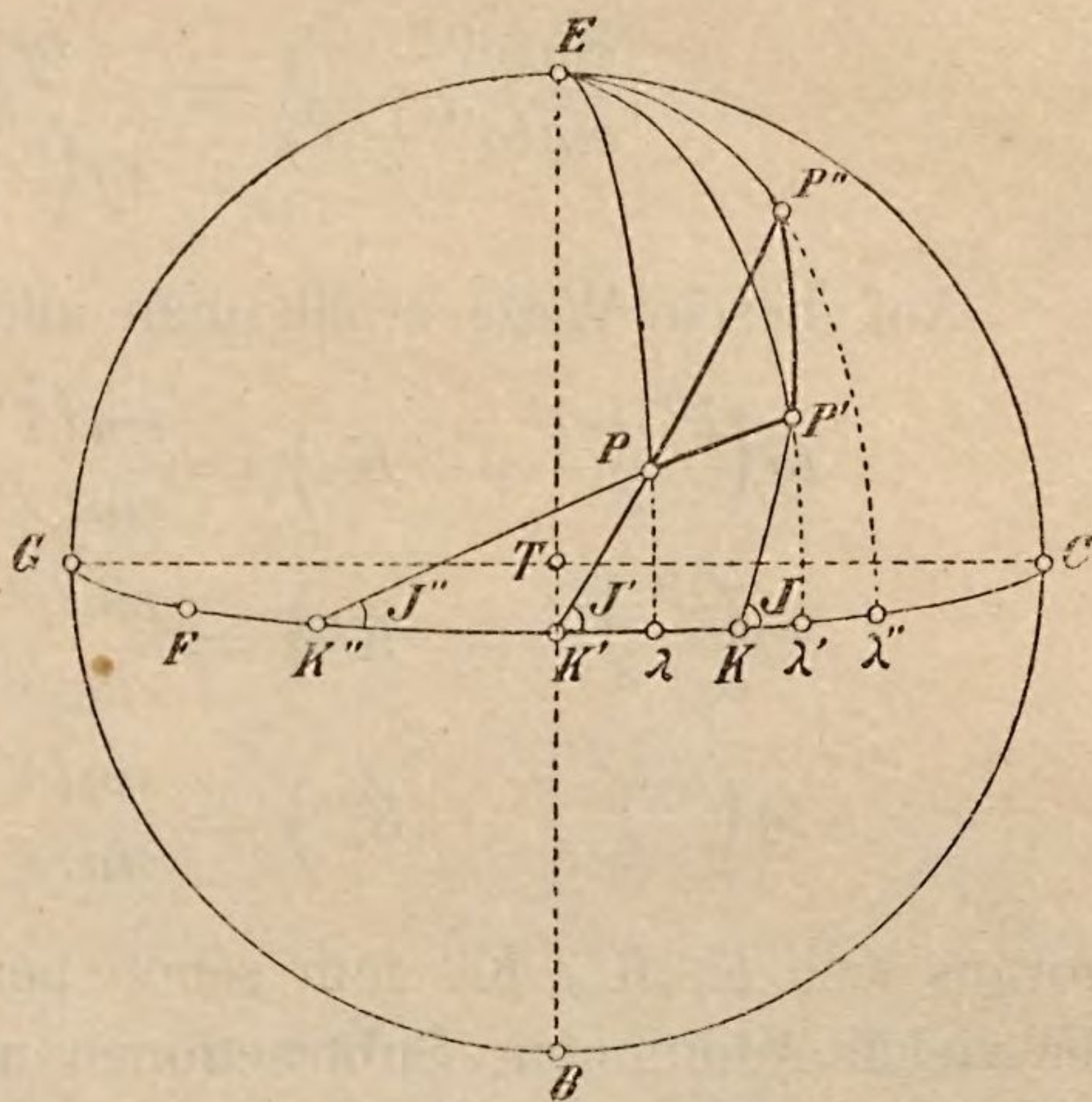
Aus den bei λ' rechtwinkligen sphärischen Dreiecken $P'\lambda' K$ und $P'\lambda' K''$

$$\operatorname{tg} \beta' = \sin(\lambda' - K) \operatorname{tg} J = \sin(\lambda' - K'') \operatorname{tg} J'' \quad \dots \quad 8\beta)$$

Aus den bei λ'' rechtwinkligen sphärischen Dreiecken $P''\lambda'' K$ und $P''\lambda'' K'$

$$\operatorname{tg} \beta'' = \sin(\lambda'' - K) \operatorname{tg} J = \sin(\lambda'' - K') \operatorname{tg} J' \quad \dots \quad 8\gamma)$$

Fig. 5.



Für die Berechnung der Knotenlängen K, K', K'' ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen beispielsweise:

$$\operatorname{tg} \beta'' : \operatorname{tg} \beta' = \sin(\lambda'' - K) : \sin(\lambda' - K)$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta'' + \operatorname{tg} \beta'} = \frac{\sin(\lambda'' - K) - \sin(\lambda' - K)}{\sin(\lambda'' - K) + \sin(\lambda' - K)}$$

oder

$$\frac{\sin(\beta'' - \beta')}{\sin(\beta'' + \beta')} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')}{\operatorname{tg} \left(\frac{\lambda'' + \lambda'}{2} - K \right)}$$

Auf diesem Wege erhält man alles in allem:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\lambda'' + \lambda'}{2} - K \right) = \frac{\sin(\beta'' + \beta')}{\sin(\beta'' - \beta')} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\lambda'' + \lambda}{2} - K' \right) = \frac{\sin(\beta'' + \beta)}{\sin(\beta'' - \beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\lambda' + \lambda}{2} - K'' \right) = \frac{\sin(\beta' + \beta)}{\sin(\beta' - \beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)$$

woraus sich K, K', K'' nun schon berechnen liessen; allein wegen der vielen Additionen, Subtractionen und Halbierungen der Winkel, wobei man sich sehr leicht irren kann, erscheinen die eben aufgestellten Formeln als zu wenig praktisch, weshalb wir dieselben umgestalten wollen. Eine jede Gleichung von der Form

$$\operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} x$$

kann man auf die nachstehenden zwei Formen bringen:

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\frac{1-a}{1+a} \sin 2x}{1 + \frac{1-a}{1+a} \cos 2x}, \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\frac{1+a}{1-a} \sin 2x}{1 + \frac{1+a}{1-a} \cos 2x}$$

was sich sehr leicht erweisen lässt; es ist nämlich

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} x - a \operatorname{tg} x}{1 + a \operatorname{tg}^2 x} = \frac{(1-a) \sin x \cos x}{\cos^2 x + a \sin^2 x}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit 2 und bedenkt, dass $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{(1-a) \sin 2x}{1 + a + \cos 2x - a \cos 2x} = \frac{(1-a) \sin 2x}{1 + a + (1-a) \cos 2x}$$

welcher letztere Ausdruck die obige Formel für $tg(x - y)$ liefert; auf ähnliche Weise findet man auch die Formel für $tg(x + y)$. Wenden wir dieses Theorem auf die obigen Gleichungen an, so bekommen wir für die Berechnung von K, K', K'' folgende sechs Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} tg(\lambda' - K) &= \frac{tg \beta' \sin(\lambda'' - \lambda')}{tg \beta'' - tg \beta' \cos(\lambda'' - \lambda')} \\ tg(\lambda'' - K) &= \frac{tg \beta'' \sin(\lambda' - \lambda'')}{tg \beta' - tg \beta'' \cos(\lambda' - \lambda'')} \\ tg(\lambda - K') &= \frac{tg \beta \sin(\lambda'' - \lambda)}{tg \beta'' - tg \beta \cos(\lambda'' - \lambda)} \\ tg(\lambda'' - K') &= \frac{tg \beta'' \sin(\lambda - \lambda'')}{tg \beta - tg \beta'' \cos(\lambda - \lambda'')} \\ tg(\lambda - K'') &= \frac{tg \beta \sin(\lambda' - \lambda)}{tg \beta' - tg \beta \cos(\lambda' - \lambda)} \\ tg(\lambda' - K'') &= \frac{tg \beta' \sin(\lambda - \lambda')}{tg \beta - tg \beta' \cos(\lambda - \lambda')} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 9)$$

Bevor man zur Berechnung dieser Knoten sich anschickt, dividire man Zähler und Nenner durch die im Nenner einzeln stehende Tangente, um auf die uns beliebte Form (siehe I. 2) zu kommen. Von den sechs hier zur Verfügung stehenden Formeln erwähle man stets diejenigen drei, wo der Tangentenquotient ein echter Bruch ist, die also einer convergenten Reihe entsprechen.

Sind K, K', K'' ermittelt, so gehe man zurück auf die Formeln 8) und berechne daraus $tg J, tg J', tg J''$; weil diese Berechnung doppelt geführt werden kann, so liefert sie zugleich eine erwünschte Controle für diesen ersten Theil der Vorbereitungsrechnungen; man vergesse aber nicht auf die in II. 1 vorgetragene Lehre, dass von mehreren Ausdrücken für ein und dieselbe Tangente derjenige am zuverlässigsten ist, der einen grösstmöglichen Zähler und Nenner besitzt.

Mit Benützung der Formeln 8) lässt sich nun die dritte Grundgleichung

$$nq tg \beta - n'q' tg \beta' + n''q'' tg \beta'' = 0$$

auf sechsfache Weise umformen, um dann mit 6) in Verbindung zu treten. Wir bekommen, wenn für $tg \beta, tg \beta', tg \beta''$ die an erster Stelle in 8) stehenden Ausdrücke substituiert werden:

$$nq \sin(\lambda - K') tg J' - n'q' \sin(\lambda' - K) tg J + n''q'' \sin(\lambda'' - K) tg J = 0$$

In der vorstehenden Gleichung können wir weiters $tg J'$ durch $tg J$ ausdrücken, und die letztere Grösse dann ganz verschwinden lassen; es ist nämlich vermöge 8)

$$tg J' = \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} tg J$$

Nach Einsetzung dieses Wertes wird, weil $tg J$ schwindet,

$$nq \frac{\sin(\lambda - K') \sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} - n'q' \sin(\lambda' - K) + n''q'' \sin(\lambda'' - K) = 0 \dots 10\alpha$$

Wenn aber oben ohne sonstige Aenderung für $tg \beta$ statt des ersten der an zweiter Stelle in 8) stehende Ausdruck, nämlich $tg \beta = \sin(\lambda - K'') tg J''$, eingesetzt wird, so kommt

$$nq \sin(\lambda - K'') tg J'' - n'q' \sin(\lambda' - K) tg J + n''q'' \sin(\lambda'' - K) tg J = 0$$

In dieser Gleichung drücken wir $tg J''$ durch $tg J$ aus, nämlich

$$tg J'' = \frac{\sin(\lambda' - K)}{\sin(\lambda' - K'')} tg J$$

Dann kommt, weil $tg J$ ganz schwindet,

$$nq \frac{\sin(\lambda - K'') \sin(\lambda' - K)}{\sin(\lambda' - K'')} - n'q' \sin(\lambda' - K) + n''q'' \sin(\lambda'' - K) = 0 \dots 10\beta$$

Die weiteren vier Umformungen der dritten Grundgleichung ergeben sich jetzt von selbst; sowie im vorhergehenden $tg J$ zweimal auftritt, so lasse man jetzt $tg J'$ zweimal erscheinen und ebenso oft verschwinden, indem man das einmal $tg J$, das anderemal $tg J''$ durch dasselbe ausdrückt, und so verfähre man dann auch mit $tg J''$. Der geneigte Leser wird uns diese leichten Operationen erlassen und dieselben für sich vornehmen; dabei kommt man auf die auch aus 8) resultierende Gleichung:

$$\sin(\lambda - K') \sin(\lambda' - K'') \sin(\lambda'' - K) = \sin(\lambda - K'') \sin(\lambda' - K) \sin(\lambda'' - K')$$

Wir wenden uns jetzt wieder den zwei Gleichungen in 6) zu und multiplicieren die erste derselben mit $\cos K$, die zweite mit $\sin K$ und subtrahieren; wir erhalten so

$$nq \sin(\lambda - K) - n'q' \sin(\lambda' - K) + n''q'' \sin(\lambda'' - K) = m \sin(M - K)$$

Von dieser Gleichung subtrahieren wir 10α , dann wird

$$nq \cdot \frac{\sin(\lambda - K) \sin(\lambda'' - K') - \sin(\lambda - K') \sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} = m \sin(M - K)$$

oder mit Benützung einer bekannten goniometrischen Formel für das Product zweier Sinusse

$$nq \cdot \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(K' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} = m \sin(M - K)$$

Subtrahieren wir aber oben 10 β) statt 10 α), dann erscheint

$$nq \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \sin(K'' - K)}{\sin(\lambda' - K'')} = m \sin(M - K)$$

Setzt man also der Kürze halber

$$\frac{\sin(\lambda'' - K')}{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(K' - K)} = \frac{\sin(\lambda' - K'')}{\sin(\lambda' - \lambda) \sin(K'' - K)} = q$$

so ist einfach genug

$$q = \frac{mq}{n} \sin(M - K)$$

Auf dem vorgezeichneten Wege findet man Ausdrücke auch für q' und q'' ; um q' zu erhalten, multipliciere man in 6) die erste Zeile mit $\cos K'$, die zweite mit $\sin K'$ und subtrahiere; zu der so erhaltenen Gleichung ziehe man die zwei geeigneten Umformungen der dritten Grundgleichung heran, aus denen man $\operatorname{tg} J'$ verschwinden gemacht hat und vereinfache den Coëfficienten von q' auf die bekannte Weise. Verfährt man dann ganz so auch in Hinsicht von q'' und stellt die gewonnenen Resultate der Uebersichtlichkeit wegen zusammen, so ist alles in allem:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\sin(\lambda'' - K')}{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(K' - K)} = \frac{\sin(\lambda' - K'')}{\sin(\lambda' - \lambda) \sin(K'' - K)} \\ q' &= \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - \lambda') \sin(K' - K)} = \frac{\sin(\lambda - K'')}{\sin(\lambda' - \lambda) \sin(K'' - K')} \\ q'' &= \frac{\sin(\lambda' - K)}{\sin(\lambda'' - \lambda') \sin(K'' - K)} = \frac{\sin(\lambda - K')}{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(K'' - K')} \end{aligned} \right\} \dots 11)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{mq}{n} \sin(M - K) \\ q' &= \frac{mq'}{n'} \sin(M - K') \\ q'' &= \frac{mq''}{n''} \sin(M - K'') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 12)$$

Den Ausdrücken für q , q' , q'' in 12) kann man jetzt noch eine andere, für das praktische Rechnen vielleicht bequemere Form geben: wir multiplicieren die erste Zeile in 4) mit $\cos K$, die zweite mit $\sin K$ und erhalten vermittelst Subtraction

$$m \sin(M - K) = nR \sin(L - K) - n'R' \sin(L' - K) + n''R'' \sin(L'' - K)$$

Wenn wir nun auch in Hinsicht auf K' und K'' eben dieselben Operationen in 4) vornehmen, so erhalten wir schliesslich

$$\left. \begin{aligned} q &= q \left[R \sin(L - K) - \frac{n'}{n} R' \sin(L' - K) + \frac{n''}{n} R'' \sin(L'' - K) \right] \\ q' &= q' \left[\frac{n}{n'} R \sin(L - K') - R' \sin(L' - K') + \frac{n''}{n'} R'' \sin(L'' - K') \right] \\ q'' &= q'' \left[\frac{n}{n''} R \sin(L - K'') - \frac{n'}{n''} R' \sin(L' - K'') + R'' \sin(L'' - K'') \right] \end{aligned} \right\} \dots 13)$$

4.

Dies sind die drei Hauptausdrücke für die Bestimmung der Distanzen q , q' , q'' , falls nämlich die Ekliptik zur Fundamentalebene angenommen wird und die Bahnbestimmung aus nur drei Beobachtungen gemacht werden soll. Da im Verlaufe unserer Entwicklung, der man einen gewissen Grad von Eleganz nicht wird absprechen können, nichts vorgekommen ist, was irgendwie auf eine Unterscheidung in der Beschaffenheit der Bahncurve hindeuten würde, so müssen diese Formeln ganz allgemein gelten und nicht allein auf die Bewegung der Planeten und Kometen, sondern überhaupt auf jede Centralbewegung anwendbar sein. Ueber die Beschaffenheit der Bahncurve entscheiden die in diesen Formeln auftretenden Dreiecksverhältnisse $n : n' : n''$, worüber wir vorläufig nur so viel wissen, dass wir sie als Functionen der Zwischenzeiten betrachten können, doch bevor wir an die Bestimmung dieser Dreiecksverhältnisse gehen, wollen wir früher noch einiges erledigen, was sich auf die Lösung dieses allgemeinen Theiles des Problems bezieht.

Die doppelten Ausdrücke für q , q' , q'' geben ein sehr erwünschtes Mittel an die Hand, den betreffenden Theil der Vorbereitungsrechnungen zu prüfen. Für die richtige Berechnung von q , q' , q'' aus 13) liefert die dritte Grundgleichung

$$n \cot \beta - n' q' \tan \beta' + n'' q'' \tan \beta'' = 0$$

eine bequeme Controle.

Wir versuchen jetzt eine kleine Discussion der Formeln 12), die wir wegen ihrer grösseren Kürze und Uebersichtlichkeit vor denen in 13) in dieser Hinsicht bevorzugen. Zunächst leuchtet ein, dass die Winkel $M - K$, $M - K'$, $M - K''$ nicht zu 0° oder 180° werden dürfen, wenn eine Berechnung der Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' überhaupt ermöglicht werden soll. Damit wir erfahren, wann dieser ungünstige Fall eintritt, so nehmen wir vorerst $M - K = 0$ oder $M = K$ an; es könnte dann in 7) statt M die Knotenlänge K substituiert werden, und wir hätten

$$n\varrho \sin(\lambda - K) - n'\varrho' \sin(\lambda' - K) + n''\varrho'' \sin(\lambda'' - K) = 0$$

subtrahieren wir davon die Gleichung 10 α), so wäre

$$\begin{aligned} \sin(\lambda - K) \sin(\lambda'' - K') - \sin(\lambda - K') \sin(\lambda'' - K) &= \\ &= \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(K' - K) = 0 \end{aligned}$$

oder wenn wir statt 10 α) die Gleichung 10 β) subtrahieren

$$\begin{aligned} \sin(\lambda - K) \sin(\lambda' - K'') - \sin(\lambda - K'') \sin(\lambda' - K) &= \\ &= \sin(\lambda' - \lambda) \sin(K'' - K) = 0 \end{aligned}$$

Weil $\lambda'' - \lambda$ und $\lambda' - \lambda$ immer von Null verschieden sind oder weil man zu einer Bahnbestimmung immer drei verschiedene Längen auswählen wird, so würde für den angenommenen Fall $M = K$ notwendigerweise folgen $\sin(K' - K) = 0$, $\sin(K'' - K) = 0$ oder $K' - K = 0^\circ$, 180° , $K'' - K = 0^\circ$, 180° . Daraus würde sich ergeben, dass alle Knotenlängen unter einander gleich oder um 180° verschieden sind, und es wäre gleichzeitig $\sin(M - K) = \sin(M - K') = \sin(M - K'') = 0$, $\varrho = \varrho' = \varrho'' = \frac{0}{0}$, das heisst, man könnte keine einzige Distanz bestimmen. Wenn wir einen Blick auf die Fig. 5 werfen, so sehen wir, dass in einem solchen Falle alle drei beobachteten Orte in einem grössten Kreise liegen; dass dem so ist, davon können wir uns noch auf eine andere Weise überzeugen. Wird beispielsweise $K' = K''$, so muss in 9) $\operatorname{tg}(\lambda - K') = \operatorname{tg}(\lambda - K'')$ sein, oder wenn man die Ausdrücke dafür gleichsetzt:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda'' - \lambda)}{\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda'' - \lambda)} = \frac{\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \lambda)}{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda' - \lambda)}$$

woraus sich mittelst einer kurzen Operation ergibt:

$$\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda'' - \lambda') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \lambda) + \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \lambda) = 0$$

Dies aber ist die Gleichung für drei Orte, die in einem grössten Kreise liegen, wie wir dies aus 3) in III. 2 wissen. Zugleich

ist dies die Gleichung einer Ebene, die durch den Koordinatenanfang geht und in welcher die drei besagten Punkte liegen, denn wie im Art. 2 die Gleichung 3) aus 1) entstanden ist, ebenso können wir aus der vorliegenden folgende Gleichung reconstruieren:

$$\xi\eta'\zeta'' - \xi\eta''\zeta' + \xi'\eta''\zeta - \xi'\eta\zeta'' + \xi''\eta\zeta' - \xi''\eta'\zeta = 0$$

wo ξ , η , ζ u. s. w. die rechtwinkligen Coordinaten eines Systems bedeuten, welches die Erde zum Anfangspunkte hat, wie im I. Abschnitt, Art. 2 dargelegt wurde. Diese Gleichung also darf nicht bestehen oder die durch die drei beobachteten Orte gelegte Ebene, d. i. die Bahnebene des Himmelskörpers, darf nicht durch den Mittelpunkt der Erde gehen, wenn die ganze Berechnung ein günstiges Resultat liefern soll; dies ist eine bemerkenswerte Forderung für eine Bahnbestimmung, von deren Erfüllung bei dieser Methode alles abhängt.

Dieser ungünstige Fall ereignet sich, wenn die Neigung der Bahn $i = 0$ ist oder wenn die Bahnebene des Himmelskörpers mit der Ekliptikebene zusammenfällt; die drei Orte P , P' , P'' würden in Fig. 5 in der Ekliptik $B'\lambda\lambda'\lambda''$, mithin in einem einzigen grössten Kreise liegen, die Breiten β wären alle $= 0^\circ$ und die Knotenlängen K , K' , K'' ganz verschwinden.

Hingegen kann bei einem einzelnen Orte ohne Beeinträchtigung für die Sicherheit der Rechnung $\operatorname{tg} \beta = 0$ werden; wir sehen dies und noch einiges andere aus 10) in II. 4, nämlich

$$\varrho = \frac{R \sin(\Omega - L) \operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} \beta + \sin(\Omega - \lambda) \operatorname{tg} i}$$

Ist $\operatorname{tg} i = 0$, so wird immer $\varrho = \frac{0}{0}$, d. i. unbestimmt; ist hingegen für einen einzelnen Ort $\operatorname{tg} \beta = 0$ und i von 0° verschieden, so wird

$$\varrho = R \frac{\sin(\Omega - L)}{\sin(\Omega - \lambda)}$$

Unbestimmt hingegen bleibt eine einzelne Distanz, wenn $\Omega - L = 0^\circ, 180^\circ$ ist, d. i. wenn die Erde zur Zeit der Beobachtung im nieder- oder aufsteigenden Knoten sich befindet, denn in diesem Falle wird, wie aus 9) in II. 4 ersichtlich ist,

$$\operatorname{tg} \beta = \sin(\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i$$

und infolge davon $\varrho = \frac{0}{0}$. Liegen dann die anderen zwei Beobachtungen nicht genug weit von dieser, so muss natürlich die ganze Bahnbestimmung unsicher ausfallen. Es empfiehlt sich daher, stets

recht weit auseinanderliegende Beobachtungen für die Bahnbestimmung auszuwählen; es liegt auch in der Natur der Sache, dass eine Curve aus drei oder mehr recht nahe aneinanderliegenden Punkten nicht sicher festgestellt werden kann. Wir werden jedoch später sehen, dass der heliocentrische Bogen, den die drei Beobachtungen umfassen, nicht über 180° gehen darf.

Es kann aber der Ausdruck

$$tg \beta \sin(\lambda'' - \lambda') - tg \beta' \sin(\lambda'' - \lambda) + tg \beta'' \sin(\lambda' - \lambda)$$

noch auf eine andere Weise sich der Null nähern und daher die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen sehr gefährdet werden; wir meinen die sogenannte Schleifenbildung bei Planeten, vermöge welcher dieselben zur Zeit der Opposition eine rückläufige geocentrische Bewegung einschlagen und auf schon früher innegehabte Orte fast ganz zurückkommen; die geocentrischen Längen fangen an abzunehmen und erhalten Werte, die sie schon früher einmal gehabt haben, und auch die Breiten werden wieder nahezu dieselben. Es kann demnach beispielsweise eine dritte Beobachtung eine kleinere geocentrische Länge liefern als die zweite war, so dass $\lambda < \lambda' > \lambda''$ wird. Oder es geht die rückläufige Bewegung nach einer gewissen Zeit in die rechtläufige (geocentrische) über, so dass $\lambda > \lambda' < \lambda''$ wird. Weil, wie gesagt, auch die Breiten zu ihren früheren Werten fast völlig zurückkehren, so muss der dritte Ort nothwendigerweise in den grössten Kreis, welcher den ersten Ort mit dem zweiten verbindet, entweder ganz hineinfallen oder doch sehr nahe an demselben zu stehen kommen, so dass alle drei Orte fast in ebendemselben grössten Kreise liegen und der obige Ausdruck nicht viel von 0 verschieden ist.

Solche Fälle sind also unbedingt zu vermeiden; weil aber gerade zur Zeit der Opposition, in welche aus begreiflichen Gründen die Entdeckung der meisten kleinen Planeten fällt, diese Discontinuität in der geocentrischen Bewegung der Planeten eintritt und man auf derartige Beobachtungen angewiesen ist, so entsteht hier eine Schwierigkeit, die man nicht anders beheben kann, als durch eine Aenderung der Methode selbst.

Es ergeben sich demnach im ganzen zwei schwierige Fälle, in denen die drei Beobachtungen einem einzigen grössten Kreise zustreben, nämlich erstens, wenn die Neigung der Bahn i sehr gering ist und zweitens, wenn bei entgegengesetzter Bewegung der geocentrischen Längen auch die Breiten zu ihren früheren Werten zurückkehren. Dem ersten Uebelstande, einer geringen Neigung der Bahn, kann

durch eine entsprechende parallele Drehung der z -Achsen, d. i. durch eine Aenderung der Fundamentalebene aufgeholfen werden; zu dieser Behauptung führt uns folgende analytische Betrachtung. Die Gleichung der Planetenebene, durch die geocentrischen rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt, wird die Form der Gleichung 2 β) in II. 2 haben, da die besagte Ebene nicht durch den Coordinatenanfang, d. i. durch den Mittelpunkt der Erde, geht; wir setzen einfach statt der lateinischen Buchstaben x, y, z die griechischen ξ, η, ζ . Wenn der Kürze halber

$$\xi'\eta''\zeta''' - \xi'\eta'''\zeta'' + \xi''\eta'''\zeta' - \xi''\eta'\zeta''' + \xi'''\eta'\zeta'' - \xi'''\eta''\zeta' = \\ = \varrho'\varrho''\varrho'''[tg\beta'\sin(\lambda''' - \lambda'') - tg\beta''\sin(\lambda''' - \lambda') + tg\beta'''\sin(\lambda'' - \lambda')] = C$$

gesetzt wird, wo wir im Vergleich zur früheren Bezeichnung um einen Accent hinaufgehen mussten, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten sollen, so ist

$$\zeta[\xi\eta] = \eta[\xi\zeta] - \xi[\eta\zeta] - C$$

die Gleichung der Planetenbahnebene, ausgedrückt durch die rechtwinkligen geocentrischen Coordinaten. Nehmen wir nun in dieser Gleichung $\eta = 0, \xi = 0$ an, so wird

$$\zeta = - \frac{C}{[\xi\eta]}$$

oder gleich dem Stücke, um welches man in der ζ -Achse hinauf oder hinabgehen muss, um an die Ebene zu gelangen. Damit die Planetenebene nicht durch den Coordinatenanfang, d. i. durch den Mittelpunkt der Erde gehe, muss dieses Stück von der Null verschieden, und damit die Bahnbestimmung möglichst sicher werde, ziemlich gross sein; sollte nun dasselbe recht klein ausfallen, oder ist die Neigung der Planetenbahn zur Ekliptikebene sehr gering, so kann man sich dadurch helfen, dass man die ζ -Achse und mit ihr parallel auch die z -Achse dreht, also eine andere Fundamentalebene wählt, denn so wird, wenn die Drehung nicht zu unbedeutend ist, jenes Stück unter allen Umständen grösser und die Berechnung sicherer; war dieses Stück der ζ -Achse schon früher gleich der Null, so kann natürlich eine derartige Drehung nichts nützen, d. h. für $i = 0$ hört die Möglichkeit einer Bahnbestimmung nach dieser Methode ganz auf. Sonst aber wird dieser Kunstgriff immer einen nicht unerheblichen Vortheil gewähren, und man wird oft auch in den Fällen, wo diese Drehung nicht geradezu nothwendig

ist, durch dieses mechanische Hilfsmittel eine grössere Sicherheit in die Bahnbestimmung bringen. — Es liegt nun nichts näher, als dass man in einem solchen Falle, wo nämlich die Neigung der Bahn sehr klein ist, die Aequatorebene zur Fundamentalebene macht, so dass die z - und y -Achsen um mehr als 23° gedreht erscheinen, die x -Achse aber wie sie war, und der Frühlingspunkt, wie im früheren Systeme, der Anfangspunkt der Zählung bleibt.

5.

Es seien daher bei der eben beschriebenen Stellung der Achsen im neuen oder Aequatorsystem x, y, z die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten des Ortes P ; α, δ, A die geocentrische Rectascension, Declination und Entfernung des Gestirnes von der Erde; A, D, R die gleichzeitige geocentrische Rectascension, Declination und Entfernung der Sonne von der Erde, so hat man analog wie in 1 α) in I. 2

$$x = A \cos \delta \cos \alpha - R \cos D \cos A$$

$$y = A \cos \delta \sin \alpha - R \cos D \sin A$$

$$z = A \sin \delta - R \sin D$$

Auf der linken Seite von x, y, z kämen hier die heliocentrischen Polarcoordinaten a, d, r zu stehen, wenn man mit a und d die heliocentrische Rectascension und Declination und mit r , wie im früheren System, die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne bezeichnet; allein wir benöthigen diese Grössen gar nicht. Da die Gleichungen 2) in III. 3 für jedes beliebige System Geltung haben, so erhalten wir für drei Beobachtungen analog wie dort die drei Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} nA \cos \delta \cos \alpha - n'A' \cos \delta' \cos \alpha' + n''A'' \cos \delta'' \cos \alpha'' = \\ = nR \cos D \cos A - n'R' \cos D' \cos A' + n''R'' \cos D'' \cos A'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nA \cos \delta \sin \alpha - n'A' \cos \delta' \sin \alpha' + n''A'' \cos \delta'' \sin \alpha'' = \\ = nR \cos D \sin A - n'R' \cos D' \sin A' + n''R'' \cos D'' \sin A'' \end{aligned}$$

$$nA \sin \delta - n'A' \sin \delta' + n''A'' \sin \delta'' = nR \sin D - n'R' \sin D' + n''R'' \sin D''$$

Wir verfahren hier ganz so wie oben in Art. 3 und bestimmen die Knotenlängen K, K', K'' und Tangenten der Neigungen J, J', J'' aus den dortigen Gleichungen 8) und 9), indem wir statt der Längen und Breiten die Rectascensionen $\alpha, \alpha', \alpha''$ und Declinationen $\delta, \delta', \delta''$ des Gestirnes einsetzen; statt 10 α) aber erhalten wir hier

$$nA \cos \delta \cdot \frac{\sin(\alpha - K') \sin(\alpha'' - K)}{\sin(\alpha'' - K')} - n'A' \cos \delta' \sin(\alpha' - K) + \\ + n''A'' \cos \delta'' \sin(\alpha'' - K) = (nR \sin D - n'R' \sin D' + n''R'' \sin D'') \cot g J$$

Multiplizieren wir jetzt die erste Zeile oben mit $\sin K$, die zweite mit $\cos K$ und subtrahieren, so kommt

$$nA \cos \delta \sin(\alpha - K) - n'A' \cos \delta' \sin(\alpha' - K) + n''A'' \cos \delta'' \sin(\alpha'' - K) = \\ = nR \cos D \sin(A - K) - n'R' \cos D' \sin(A' - K) + n''R'' \cos D'' \sin(A'' - K)$$

Subtrahieren wir von dieser Gleichung die vorangehende, so ist

$$nA \cos \delta \cdot \frac{\sin(\alpha'' - \alpha) \sin(K' - K)}{\sin(\alpha'' - K')} = \\ = nR [\cos D \sin(A - K) - \sin D \cot g J] - \\ - n'R' [\cos D' \sin(A' - K) - \sin D' \cot g J] + \\ + n''R'' [\cos D'' \sin(A'' - K) - \sin D'' \cot g J]$$

Setzt man nun wie in 11) Art. 3

$$\frac{\sin(\alpha'' - K')}{\sin(\alpha'' - \alpha) \sin(K' - K)} = \frac{\sin(\alpha' - K'')}{\sin(\alpha' - \alpha) \sin(K'' - K)} = q, \text{ ferner} \\ \sin(A - K) \operatorname{tg} J = \operatorname{tg} F, \sin(A' - K) \operatorname{tg} J = \operatorname{tg} F', \sin(A'' - K) \operatorname{tg} J = \operatorname{tg} F''$$

so wird schliesslich

$$A \cos \delta = q \cot g J \left[\frac{R \sin(F - D)}{\cos F} - \frac{n'R' \sin(F' - D')}{n \cos F'} + \frac{n''R'' \sin(F'' - D'')}{n \cos F''} \right]$$

In gleicher Weise gelangen wir zu Ausdrücken auch für die beiden übrigen Distanzen; setzt man nämlich

$$\frac{\sin(\alpha'' - K)}{\sin(\alpha'' - \alpha') \sin(K' - K)} = \frac{\sin(\alpha - K'')}{\sin(\alpha' - \alpha) \sin(K'' - K')} = q' \\ \sin(A - K') \operatorname{tg} J' = \operatorname{tg} G, \sin(A' - K') \operatorname{tg} J' = \operatorname{tg} G', \sin(A'' - K') \operatorname{tg} J'' = \operatorname{tg} G''$$

so wird

$$A' \cos \delta' = q' \cot g J' \left[\frac{nR \sin(G - D)}{n' \cos G} - \frac{R' \sin(G' - D')}{\cos G'} + \frac{n''R'' \sin(G'' - D'')}{n' \cos G''} \right]$$

Wenn man zuletzt setzt:

$$\frac{\sin(\alpha' - K)}{\sin(\alpha'' - \alpha') \sin(K'' - K)} = \frac{\sin(\alpha - K')}{\sin(\alpha'' - \alpha) \sin(K'' - K')} = q''$$

$$\sin(A - K'') \operatorname{tg} J'' = \operatorname{tg} H$$

$$\sin(A' - K'') \operatorname{tg} J'' = \operatorname{tg} H', \quad \sin(A'' - K'') \operatorname{tg} J'' = \operatorname{tg} H''$$

so ist

$$\begin{aligned} & \Delta'' \cos \delta'' = \\ & = q'' \cotg J'' \left[\frac{nR \sin(H - D)}{n'' \cos H} - \frac{n'R' \sin(H' - D')}{n'' \cos H''} + \frac{R'' \sin(H'' - D'')}{\cos H''} \right] \end{aligned}$$

Nach diesen Formeln also werden die Distanzen Δ , Δ' , Δ'' am zuverlässigsten gerechnet werden, falls die Neigung der Bahn sehr klein sein sollte; da hier die Z -Coordinationen der Sonne nicht verschwinden, wie im Ekliptiksystem, so sind die vorstehenden Formeln ganz allgemein gehalten und gestatten demnach jede beliebige Drehung der z -Achsen; man ist daher nicht gerade auf das Aequatorsystem dabei angewiesen, sondern der Drehungswinkel kann auch mehr oder auch weniger betragen als die Schiefe der Ekliptik. Für unseren Fall ist daher in den Formeln II. 11

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos(N + \varepsilon)}{\cos N} \operatorname{tg} \lambda, \quad \operatorname{tg} \delta = \sin \alpha \operatorname{tg}(N + \varepsilon)$$

ε ein beliebiger Winkel, wofür man hie und da recht hohe Werte (natürlich nicht über 90°) nehmen wird, um dadurch eine bedeutende Drehung zustande zu bringen und das erwähnte Stück der ζ -Achse zu vergrössern; es versteht sich von selbst, dass α und δ dann nicht die gewöhnlichen Rectascensionen und Declinationen des Gestirnes sind; auch ist dem Gesagten zufolge klar, dass je grösser der Betrag

$$\operatorname{tg} \delta \sin(\alpha'' - \alpha') - \operatorname{tg} \delta' \sin(\alpha'' - \alpha) + \operatorname{tg} \delta'' \sin(\alpha' - \alpha)$$

ausfällt, desto sicherer die Berechnung der Distanzen Δ , Δ' , Δ'' wird. Setzt man oben $D = D' = D'' = 0$, so wird man auf die Formeln 13) in III. 3 geführt, wie es sein muss.

Es würde uns jetzt noch erübrigen, von dem zweiten schwierigen Falle zu sprechen, wo nämlich durch den Uebergang in die entgegengesetzte geocentrische Bewegung des Planeten die drei Orte ebenfalls nahezu in einen grössten Kreis zu liegen kommen und wo man dann eine vierte Beobachtung zu Hilfe nehmen muss, um die Ent-

fernungen des Planeten von der Erde mit Sicherheit berechnen zu können. Weil aber die bezügliche analytische Entwicklung einen ziemlichen Umfang annimmt, so versparen wir uns dieselbe für einen späteren Abschnitt und handeln zunächst von den Dreieckverhältnissen.

6.

Bahnbestimmung der Planeten.

Mag man nun die Ekliptik oder eine andere Ebene zur Fundamentalebene machen, die Bestimmung der Dreieckverhältnisse $n : n' : n''$ ist ein davon ganz unabhängiges Geschäft, da wir es hier mit den Raumdreiecken zu thun haben, welche der Himmelskörper zwischen den Orten P, P', P'' beschreibt und die Fundamentalebene nur insoferne in Betracht kommt, als von der Wahl derselben wohl die Grösse der Projectionsdreiecke abhängt, nicht aber ihr gegenseitiges Verhältniss, worauf es hier einzig und allein ankommt; andererseits ist es einleuchtend, dass wir für n, n', n'' recht grosse Zahlen zu gewinnen trachten müssen, um dadurch die Sicherheit in den Dreieckverhältnissen und folglich auch in der ganzen Bahnbestimmung zu erhöhen; auch daraus geht hervor, dass recht weit auseinanderliegende Beobachtungen auszuwählen sind. Hiemit sind wir auch beim schwierigsten Theile des ganzen Problems angelangt, und die Mangelhaftigkeit, an der die bisherige Bahnberechnung der Planeten und Kometen litt, liegt hauptsächlich in der fehlerhaften Bestimmung dieser Dreiecke. — Der analytische Ausdruck für die Fläche eines solchen Dreiecks ist bald gefunden, denn nehmen wir beispielsweise das Doppeldreieck $n = r'r'' \sin(v'' - v')$ zwischen den Orten P' und P'' , so ergibt sich aus 6) in II. 4

$$n^2 = (x'y'' - x''y')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (y'z'' - y''z')^2$$

aber damit ist uns nichts geholfen, denn mögen wir hierin die rechtwinkligen Coordinaten durch die heliocentrischen oder geocentrischen Polarcoordinaten ausdrücken, wir kommen um keinen Schritt weiter, da uns alle Anhaltspunkte fehlen, mit welchen Versuchswerten der darin vorkommenden Unbekannten wir die Rechnung einleiten sollen. Da es sich indessen nur um die Verhältnisse handelt, in welchen diese Dreiecke zu einander stehen, so ist es nicht nothwendig, dass wir uns mit den Raumdreiecken selbst beschäftigen, denn gelingt es uns nur, die Verhältnisse der Projectionsdreiecke einer bestimmten Coordinatenebene, beispielsweise der Ekliptikebene, festzustellen, so ist damit auch $n : n' : n''$ gegeben, wie wir dies aus 1) in III. 3

ersehen. Zu diesem Ende betrachten wir die Ausdrücke für die drei Arten von Projectionsdreiecken, in welchen die geocentrischen Polar-coordinaten vorkommen, etwas genauer; wir finden dieselben in Art. 2 angegeben. Diese Ausdrücke erweisen sich unter allen noch am zugänglichsten, weil sie ausser ϱ , ϱ' , ϱ'' lauter bekannte Grössen enthalten; es wird sich dabei nur darum handeln, mit welchen Versuchswerten von ϱ , ϱ' , ϱ'' wir die ganze Rechnung einfädeln sollen. Diese Distanzen zuerst alle der Null gleichzusetzen oder die Erde mit dem Himmelskörper zusammenfallen zu lassen, geht nicht an, weil in diesem Falle, da die Projectionen der xz - und yz -Ebene ganz verschwinden, $n = N$, $n' = N'$, $n'' = N''$ sein und dann aus 12) Art. 3 ebenfalls $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$ resultieren würde, was leicht zu beweisen ist. Aus 4) Art. 3 ergibt sich nämlich mittelst einer uns schon geläufigen Operation:

$$\begin{aligned} n'R' \sin(L' - L) - n''R'' \sin(L'' - L) &= m \sin(L - M) \\ nR - n'R' \cos(L' - L) + n''R'' \cos(L'' - L) &= m \cos(L - M) \end{aligned}$$

Setzt man hierin $n = N$, $n' = N'$, $n'' = N''$ und führt die betreffenden Ausdrücke wirklich ein, so wird

$$m \sin(L - M) = 0, \quad m \cos(L - M) = 0$$

woraus jedenfalls $m = 0$, also auch $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$ folgt, was zu beweisen war. Daraus erhellt auch, dass es ein Irrthum wäre zu glauben, man könne zu irgendwelcher brauchbaren Näherung von ϱ , ϱ' , ϱ'' gelangen, wenn man in 13) Art. 3 statt n , n' , n'' zuerst die von der Erde beschriebenen Dreiecke N , N' , N'' einsetzte.

Unter so schwierigen Verhältnissen für die Auffindung geeigneter Versuchswerte von ϱ , ϱ' , ϱ'' , mit denen man die Rechnung einleiten könnte, stellt sich zuletzt die Nothwendigkeit heraus, irgendwelche Hypothese inbetreff der Bahn selbst zu machen, und da liegt wohl nichts näher, als für die Planeten eine Kreisbahn, für die Kometen eine Parabel zuerst anzunehmen, als die beiden Grenzfälle, zwischen denen die Ellipse, die eigentliche Bahncurve, eingeschlossen ist. Die Durchführung einer Kreishypothese bei Planeten gestaltet sich sehr einfach; man nehme einen Kreis an, dessen Radius der mittleren Entfernung des Planeten von der Sonne beiläufig gleichkommt. Bei den kleinen, zwischen Mars und Jupiter befindlichen Planeten, die wir hier vorzüglich im Auge haben, schwankt diese mittlere Entfernung erfahrungsmässig zwischen 2 und 3, d. h. diese Planeten sind

zwei- bis dreimal so weit von der Sonne entfernt als die Erde; wir begehen mithin keinen allzugrossen Fehler, wenn wir in erster Hypothese den Radius dieses Kreises zu 2·5 annehmen. Aus Fig. 3 in I. 2 hatten wir abgeleitet

$$r^2 = R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos \psi, \text{ wobei} \\ \cos \psi = \cos \beta \cos(L - \lambda)$$

eine bekannte Grösse ist; daraus erhalten wir

$$\Delta = R \cos \psi \pm \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \psi} \dots\dots\dots 1)$$

wo von den beiden vor der Wurzelgrösse stehenden Zeichen immer das positive zu nehmen ist; $\sin \psi$ kann stets positiv sein, da $\sin^2 \psi$ unter allen Umständen positiv ausfällt. Unserer Kreishypothese gemäss setzen wir hierin $r = 2\cdot 5$ und berechnen darnach die drei Distanzen Δ , Δ' , Δ'' , und weil $\varrho = \Delta \cos \beta$, so sind hiemit auch ϱ_0 , ϱ_0' , ϱ_0'' gegeben; wir geben diesen Distanzen den Index $_0$, um sie als der Kreishypothese angehörig zu kennzeichnen. Mit diesen Versuchswerten berechnen wir jetzt eine der drei Reihen von Projectionsdreiecken in 1) Art. 3. Mit den so bestimmten Dreieckverhältnissen $n : n' : n''$ gehe man dann in 13) Art. 3 oder in den Art. 5 ein und berechne daraus ϱ , ϱ' , ϱ'' . Durch diesen Process, der sich uns als ein Uebergang vom Kreise auf die Ellipse darstellen wird, erhält man aber für ϱ , ϱ' , ϱ'' Werte, die der Kreishypothese schon nicht mehr entsprechen; denn rechnet man jetzt versuchsweise r , r' , r'' zurück nach der obigen Formel, so kommt für jeden der drei Radienvectoren ein besonderer Wert zum Vorschein. Berechnen wir deshalb auf Grund der so erhaltenen Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' die Elemente der Bahn, wie weiter unten gezeigt werden wird, so kommen wir in der That auf eine Ellipse mit geringer Excentricität; bestimmen wir aber zuletzt auf Grund der berechneten Elemente auch noch die Grösse k , die Constante der *theoria motus*, deren numerischen Betrag wir aus II. 7 kennen, so erhalten wir vielleicht einen ganz anderen Wert dafür, ein Beweis, dass die zustande gebrachte Ellipse der Wahrheit nicht entspricht. Es steht uns nun nichts im Wege, eine andere Kreishypothese mit einem mehr oder weniger verschiedenen Radius anzunehmen und den eben beschriebenen Versuch zu wiederholen; kommt zuletzt ein k zum Vorschein, welches von dem bekannten Werte nicht mehr so stark abweicht, so sind wir der Wahrheit schon näher gerückt. Durch mehrmalige Wiederholung solcher Versuche, wobei durch

geeignete Mittel der Radius des Kreises geschickt geändert wird, gelangt man schliesslich zu einem Werte von k , der mit dem bekannten stimmt und daher auf eine Ellipse, die sich der vom Planeten beschriebenen so genau als möglich anschliesst. Die hier in allgemeinen und für den Leser vielleicht noch dunklen Umrissen gegebene Methode soll nun im Nachfolgenden durch einen strengen analytischen Beweis begründet, näher ausgeführt und zugleich noch ein anderer kürzerer Weg für die Berechnung der Dreieckverhältnisse angegeben werden.

7.

Wir versuchen vor allem, die Projectionsdreiecke irgend einer Coordinatenebene, z. B. der Ekliptik- oder xy -Ebene, als Functionen der Zwischenzeiten darzustellen; nach dem Satze von Taylor ist

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{dx}{dt}(t' - t) + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{(t' - t)^2}{2} + \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \frac{(t' - t)^3}{2 \cdot 3} + \dots \\ y' &= y + \frac{dy}{dt}(t' - t) + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(t' - t)^2}{2} + \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{(t' - t)^3}{2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} x'' &= x + \frac{dx}{dt}(t'' - t) + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{(t'' - t)^2}{2} + \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \frac{(t'' - t)^3}{2 \cdot 3} + \dots \\ y'' &= y + \frac{dy}{dt}(t'' - t) + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(t'' - t)^2}{2} + \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{(t'' - t)^3}{2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Wir multiplicieren in der ersten Gruppe die erste Zeile mit y , die zweite mit x und subtrahieren; es kommt, wenn der Kürze halber $t' - t = \tau''$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \tau'' + \\ &+ \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) \cdot \frac{\tau''^2}{2} + \left(x \frac{d^3y}{dt^3} - y \frac{d^3x}{dt^3} \right) \cdot \frac{\tau''^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

wo das Gesetz der Fortschreitung klar ist. Auf demselben Wege erhalten wir aus der zweiten Gruppe, wenn $t'' - t = \tau'$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} xy'' - x''y &= \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \tau' + \\ &+ \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) \cdot \frac{\tau'^2}{2} + \left(x \frac{d^3y}{dt^3} - y \frac{d^3x}{dt^3} \right) \cdot \frac{\tau'^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Zuletzt ist analog dem Vorangehenden, wenn $t'' - t' = \tau$ gesetzt wird,

$$x'y'' - x''y' = \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) \tau + \\ + \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) \cdot \frac{\tau^2}{2} + \left(x \frac{d^3y}{dt^3} - y \frac{d^3x}{dt^3}\right) \cdot \frac{\tau^3}{6} + \dots$$

Die in diesen drei Reihen auftretenden Coëfficienten bestimmen sich auf folgende Weise. Aus dem II. Abschnitt, Art. 5, Gl. 4) und Art. 7, Gl. 1) wissen wir, dass

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c \cos i = k \sqrt{p(1+m)} \cos i$$

ist; weiters haben wir aus 2) in II. 4

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Zur Erneuerung der noch übrigen Coëfficienten differenzieren wir die in 1) in II. 4 entwickelten Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{k^2(1+m)y}{r^3}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{k^2(1+m)x}{r^3}$$

einigemale; wir erhalten zunächst

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{k^2(1+m)}{dt} \left(\frac{3y dr}{r^4} - \frac{dy}{r^3} \right) \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{k^2(1+m)}{dt} \left(\frac{3x dr}{r^4} - \frac{dx}{r^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \alpha)$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4y}{dt^4} &= \frac{k^2(1+m)}{dt^2} \left(- \frac{12y dr^2}{r^5} + \frac{6dy dr + 3y d^2r}{r^4} - \frac{d^2y}{r^3} \right) \\ \frac{d^4x}{dt^4} &= \frac{k^2(1+m)}{dt^2} \left(- \frac{12x dr^2}{r^5} + \frac{6dx dr + 3x d^2r}{r^4} - \frac{d^2x}{r^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \beta)$$

Multiplizieren wir jetzt in α) die erste Gleichung mit x , die zweite mit y , so kommt vermittelst Subtraction

$$x \frac{d^3y}{dt^3} - y \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{k^2(1+m)}{dt} \cdot \frac{ydx - xdy}{r^3} = - \frac{k^3(1+m)^{3/2} \sqrt{p} \cos i}{r^3}$$

Auf ebendemselben Wege erhalten wir aus β)

$$x \frac{d^4 y}{dt^4} - y \frac{d^4 x}{dt^4} = \frac{6k^3(1+m)^{3/2} \sqrt{p} \cos i}{r^4} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Differenzieren wir noch die vorstehende Gleichung, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^4 y}{dt^4} + x \frac{d^5 y}{dt^5} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^4 x}{dt^4} - y \frac{d^5 x}{dt^5} &= \\ &= 6k^3(1+m)^{3/2} \sqrt{p} \cos i \left(\frac{d^2 r}{r^4 dt^2} - \frac{4dr^2}{r^5 dt^2} \right) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir dann in β) die erste Gleichung mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$, so kommt vermittlest Subtraction

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^4 y}{dt^4} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^4 x}{dt^4} &= \\ &= k^3(1+m)^{3/2} \sqrt{p} \cos i \left(\frac{12dr^2}{r^5 dt^2} - \frac{3d^2 r}{r^4 dt^2} - \frac{k^2(1+m)}{r^6} \right) \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese von der vorangehenden Gleichung, so ist

$$x \frac{d^5 y}{dt^5} - y \frac{d^5 x}{dt^5} = k^3(1+m)^{3/2} \sqrt{p} \cos i \left(\frac{k^2(1+m)}{r^6} - \frac{36dr^2}{r^5 dt^2} + \frac{9d^2 r}{r^4 dt^2} \right)$$

Substituieren wir die so gefundenen Werte dieser Coëfficienten beispielsweise in die Reihe für das Projectionsdreieck $x'y'' - x''y' = n \cos i$ und heben den Factor $k\tau \sqrt{p(1+m)}$ heraus, so wird, da $\cos i$ schwindet,

$$\begin{aligned} n &= k\tau \sqrt{p(1+m)} \left[1 - \frac{k^2 \tau^2 (1+m)}{2 \cdot 3 \cdot r^3} + \frac{k^4 \tau^4 (1+m)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot r^6} - \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2 \tau^3 (1+m)}{4r^4} \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{3k^2 \tau^4 (1+m)}{10r^4} \left(\frac{dr^2}{r dt^2} - \frac{d^2 r}{4 dt^2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin τ durch τ' und τ'' , so erhalten wir Reihen für n' und n'' . Das Fortschreiten im ersten Theile der vorliegenden Reihe ist klar, nicht so im zweiten Theile. Um die Sache zu vereinfachen, setzen wir

$$\mu = \frac{k \sqrt{1+m}}{r^{3/2}}$$

was offenbar der Ausdruck für die Geschwindigkeit eines Körpers ist, der sich im Kreise bewegt, wie aus 4) in II. 8 ersichtlich ist; dann wird, wenn man mit $\varphi(\tau)$ den Betrag bezeichnet, welchen die Glieder des zweiten Theiles der Reihe repräsentieren,

$$n = r\sqrt{rp} \cdot \mu\tau \left[1 - \frac{(\mu\tau)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu\tau)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots + \varphi(\tau) \right]$$

Soll die Reihe innerhalb der Klammer convergieren, so muss offenbar

$$\frac{(\mu\tau)^2}{2\omega(2\omega+1)} < 1 \quad \text{oder} \quad \mu\tau < 2\omega$$

sein, wo ω jede beliebige ganze Zahl bedeutet; da ω ins Unendliche gehen kann, so darf $\mu\tau$ jeden endlichen Wert annehmen, und es ist diese Reihe demnach für jeden endlichen Wert von $\mu\tau$ convergent. — Die Convergenz der Glieder in $\varphi(\tau)$ hängt aber sehr von der Beschaffenheit des Differentialquotienten $\frac{dr}{dt}$ oder von der Beschaffenheit der vom Himmelskörper beschriebenen Ellipse ab. Eliminiert man aus α) in II. 6 (Seite 28) anstatt dt das Differential dv , so kommt

$$\frac{dr}{dt} = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}$$

Anmerkung. Substituiert man hierin für r den Wert

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = \frac{a\cos^2\varphi}{1+\sin\varphi\cos v}$$

so hat man für diesen Differentialquotienten auch noch folgende Form:

$$\frac{dr}{dt} = k\sqrt{1+m} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi \sin v}{\sqrt{a}} = k\sqrt{1+m} \cdot \frac{\sin\varphi \sin v}{\sqrt{p}}$$

Der zweite Wert ergibt sich aus dem ersten, wenn man berücksichtigt, dass $p = a\cos^2\varphi$ ist.

Daraus erhellt, dass für kleine Excentricitäten, wo also e der Null und der halbe Parameter p sich dem Radiusvector r nähert, auch dieser Differentialquotient klein ausfällt; für $e = 0$ und mithin $a = p = r$, also für den Kreis wird

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

Es werden demnach bei Planetenbahnen, deren Ellipsen bekanntlich nur geringe Excentricitäten aufweisen, die Glieder in $\varphi(\tau)$ jedenfalls convergieren und es müssen die Ausdrücke für n , n' , n'' in diesem Falle brauchbar sein oder vielmehr sich brauchbar machen lassen. Stellen wir uns diese Ausdrücke wirklich auf und bilden daraus die Dreieckverhältnisse, so haben wir, da $r \sqrt{rp} \cdot \mu$ schwindet,

$$\begin{aligned} n : n' : n'' &= \tau \left[1 - \frac{(\mu\tau)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu\tau)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots + \varphi(\tau) \right] : \\ &: \tau' \left[1 - \frac{(\mu\tau')^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu\tau')^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots + \varphi(\tau') \right] : \\ &: \tau'' \left[1 - \frac{(\mu\tau'')^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu\tau'')^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots + \varphi(\tau'') \right] \end{aligned}$$

Um diese Dreieckverhältnisse, die wie gesagt nur für Bahnen mit geringer Excentricität anwendbar sind, für die praktische Rechnung zugänglich zu machen, dafür stehen uns jetzt zwei Wege offen. — Da unserer Voraussetzung gemäss $\varphi(\tau)$, $\varphi(\tau')$, $\varphi(\tau'')$ convergente Reihen sind und ihnen daher bestimmte Summen entsprechen, so können wir die Beträge, die sie liefern, dadurch compensieren, dass wir in den voraufgehenden Reihen μ ein wenig ändern. Ist nun μ_0 derjenige Wert, durch dessen Einsetzung in die gedachten Reihen $\varphi(\tau)$, $\varphi(\tau')$, $\varphi(\tau'')$ vollkommen aufgewogen werden, so erhalten die Dreieckverhältnisse die Gestalt:

$$\begin{aligned} n : n' : n'' &= \tau \left[1 - \frac{(\mu_0\tau)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu_0\tau)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right] : \\ &: \tau' \left[1 - \frac{(\mu_0\tau')^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu_0\tau')^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right] : \\ &: \tau'' \left[1 - \frac{(\mu_0\tau'')^2}{2 \cdot 3} + \frac{(\mu_0\tau'')^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right] \end{aligned}$$

Dabei setzen wir

$$\mu_0 = \frac{k \sqrt{1+m}}{r_0^{3/2}}$$

wo r_0 den Radius eines noch näher zu definierenden Kreises bedeutet. Die Summierung nun der vorliegenden Reihen, deren gegenseitiges Verhältnis zugleich das der entsprechenden Dreiecke ist, kann auf zweierlei Weise bewerkstelligt werden, und darin liegt der dop-

pelte Weg, wovon wir früher gesprochen haben. Wir multiplicieren erstens τ , τ' , τ'' ausserhalb der Klammern mit μ_0 , so werden, da bekanntlich

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right)$$

ist, die Dreieckverhältnisse folgende elegante Form annehmen:

$$n : n' : n'' = \sin(\mu_0 \tau) : \sin(\mu_0 \tau') : \sin(\mu_0 \tau'')$$

oder wir können, um die dritten und die noch folgenden Glieder dieser drei Reihen aufzuwiegen, in den zweiten Gliedern μ_0 ein wenig ändern; da die Reihen convergieren, so ist dieser Vorgang gewiss erlaubt. Es sei also μ , derjenige Wert, durch dessen Einführung in die zweiten Glieder die noch folgenden Glieder vollkommen aufgewogen werden, so haben wir

$$n : n' : n'' = \tau \left[1 - \frac{(\mu, \tau)^2}{2 \cdot 3} \right] : \tau' \left[1 - \frac{(\mu, \tau')^2}{2 \cdot 3} \right] : \tau'' \left[1 - \frac{(\mu, \tau'')^2}{2 \cdot 3} \right]$$

wobei dann

$$\mu = \frac{k \sqrt{1 + m}}{r^{3/2}}$$

zu setzen ist. — Diese doppelte Form also können unsere Dreieckverhältnisse in einer Ellipse mit geringer Excentricität annehmen; die erstere davon gibt deutlich zu erkennen, dass wir es hier mit Verhältnissen zu thun haben, wie sie in einem Kreise vorkommen, denn bekanntlich stehen in einem Kreise Dreiecke, die im Centrum einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen, in demselben Verhältnisse zu einander, wie die Sinusse der betreffenden Centriwinkel. Es ist nun die Frage, wie man r_0 , den Radius dieses supponierten Kreises, oder r , im zweiten Falle zu bestimmen hat. Was r_0 anlangt, so kann man erwarten, dass dieser Radius einen Mittelwert zwischen den drei Radienvectoren r , r' , r'' in der Ellipse erhalten, also dem Radius der mittleren Beobachtung am nächsten kommen wird, denn nur so lässt sich eine Uebereinstimmung der Dreieckverhältnisse im Kreise und in der Ellipse denken. In Hinsicht von r , aber wird man im allgemeinen einen von r_0 verschiedenen Wert erwarten; offenbar ist hier die Summe der noch folgenden Glieder, die durch das zweite aufgewogen werden soll, entscheidend. Hat man es daher mit einer

Planetenbahn zu thun, deren Elemente nahezu richtig sind, so wird man den Radiusvector der mittleren Beobachtung rechnen und denselben in erster Näherung als Radius des supponierten Kreises annehmen; sind hingegen die Bahnelemente noch völlig unbekannt, so nehme man für r_0 zuerst einen Wert an, der der mittleren Entfernung des Planeten von der Sonne beiläufig gleichkommt; für die Asteroiden haben wir schon oben den Wert $r_0 = 2.5$ empfohlen, übrigens sind auch hier wenigstens bei den meisten derselben durch den Fleiss der Astronomen die Bahnelemente schon annähernd richtig berechnet worden. So werden wir von selbst auf das Feld der Versuche geführt. Mit dem angenommenen Radius r_0 wird μ_0 und weiters die Verhältnisse

$$n : n' : n'' = \sin(\mu_0 \tau) : \sin(\mu_0 \tau') : \sin(\mu_0 \tau'')$$

bestimmt und damit aus 13) Art. 3 die Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' gerechnet. Auf Grund der so erhaltenen Distanzen schreitet man auf dem von uns gleich weiter unten vorgezeichneten Wege zur Bestimmung der Bahnelemente selbst vor und rechnet zuletzt auch k , die Constante der *theoria motus*. Käme dabei zufällig der bekannte Wert zustande, so wäre die Bahnbestimmung auch schon beendet; weil aber in den weitaus meisten Fällen bei einem ersten Versuche immer ein anderer Wert erscheinen wird, so wird man r_0 für den zweiten Versuch ein wenig ändern und die ganze Rechnung von vorne beginnen; die Versuche werden so lange fortgesetzt, bis der bekannte Wert $\lg k = 3.5500066$ (in Sec.) zum Vorschein kommt.

Um die Winkel $\mu_0 \tau$, $\mu_0 \tau'$, $\mu_0 \tau''$, zwischen denen die Gleichung

$$\mu_0 \tau - \mu_0 \tau' + \mu_0 \tau'' = 0$$

besteht, gleich in Secunden zu erhalten, drücke man bei der Berechnung von μ_0 die Constante k in Secunden aus. — Der grösste von diesen drei Winkeln ist demnach immer $\mu_0 \tau'$; damit nun der Sinus desselben nicht negativ ausfalle, so darf die heliocentrische Bewegung des Planeten zwischen der ersten und dritten Beobachtung nicht über 180° gehen. Auch dies ist eine bemerkenswerte Forderung bei einer Bahnbestimmung, wegen deren Nichtbeachtung die Astronomen bei Kometen oft auf hyperbolische Elemente gestossen sind und daher der Hyperbel auch eine gewisse Berechtigung einräumen zu müssen glaubten. Die Richtigkeit unserer Behauptung leuchtet sofort ein, wenn wir bedenken, dass in einem solchen Falle, wo der heliocentrische Bogen mehr als 180° umfasst, Sectorfläche und

Dreieck getrennt liegen und entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so dass das Dreieck nicht als eine Function der betreffenden Zwischenzeit aufgefasst werden kann.

Um sich aber von der Güte des ausgewählten Beobachtungsmaterials zu überzeugen, wird man die Kreishypothese, deren Zulässigkeit wir unseres Dafürhaltens zur Genüge bewiesen haben, auch auf die in Art. 6 beschriebene Weise bilden. Hier sowohl als dort wird man den Radius r_0 eines und desselben Kreises zugrunde legen und aus der Gleichung

$$\Delta = R \cos \psi + \sqrt{r_0^2 - R^2 \sin^2 \psi}, \quad \text{wo} \quad \cos \psi = \cos \beta \cos (L - \lambda)$$

die Distanzen $\varrho_0, \varrho'_0, \varrho''_0$ rechnen, mit deren Hilfe dann die Projectionsdreiecke der drei Coordinatenebenen bestimmt werden. Wir setzen der Uebersichtlichkeit wegen die Ausdrücke für diese Projectionsdreiecke nochmals her, und zwar die für die Projectionen der xy - oder Ekliptikebene in unveränderter Form, hingegen haben wir die Ausdrücke für die Projectionen der beiden anderen Ebenen mit Benützung der Gleichungen 8) in III. 3 etwas umgestaltet, um sie für die Praxis geeigneter zu machen. Es sind also die Projectionsdreiecke der

xy -Ebene:

$$\begin{aligned} v &= \varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') - R'' \varrho' \sin(L'' - \lambda') + R' \varrho'' \sin(L' - \lambda'') + N \\ v' &= \varrho \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) - R'' \varrho \sin(L'' - \lambda) + R \varrho'' \sin(L - \lambda'') + N' \\ v'' &= \varrho \varrho' \sin(\lambda' - \lambda) - R' \varrho \sin(L' - \lambda) + R \varrho' \sin(L - \lambda') + N'' \end{aligned}$$

xz -Ebene:

$$\begin{aligned} v_1 &= [\varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') \cos K + \\ &+ R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \cos L'' - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \cos L'] \operatorname{tg} J \\ v'_1 &= [\varrho \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) \cos K' + \\ &+ R'' \varrho \sin(\lambda - K') \cos L'' - R \varrho'' \sin(\lambda'' - K') \cos L] \operatorname{tg} J' \\ v''_1 &= [\varrho \varrho' \sin(\lambda' - \lambda) \cos K'' + \\ &+ R' \varrho \sin(\lambda - K'') \cos L' - R \varrho' \sin(\lambda' - K'') \cos L] \operatorname{tg} J'' \end{aligned}$$

yz -Ebene:

$$\begin{aligned} v_{11} &= [\varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') \sin K + \\ &+ R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \sin L'' - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \sin L] \operatorname{tg} J \end{aligned}$$

$$v'' = [q q'' \sin(\lambda'' - \lambda) \sin K' + \\ + R'' q \sin(\lambda - K') \sin L' - R q'' \sin(\lambda'' - K') \sin L] \operatorname{tg} J'$$

$$v'' = [q q' \sin(\lambda' - \lambda) \sin K'' + \\ + R' q \sin(\lambda - K'') \sin L' - R q' \sin(\lambda' - K'') \sin L] \operatorname{tg} J''$$

In diese Ausdrücke setze man statt q, q', q'' die aus der obigen Gleichung für Δ hervorgegangenen Distanzen q_0, q'_0, q''_0 und bestimme darnach die Dreieckverhältnisse. Es ist hinreichend, die Projectionen nur einer Ebene zu berechnen; am geeignetsten hiefür sind diejenigen der xy - oder Ekliptikebene, weil sie am ehesten zugänglich sind und auch die grössten Werte erreichen. Soll nun das ausgesuchte Beobachtungsmaterial als vorzüglich bezeichnet werden dürfen, so müssen die so berechneten Dreieckverhältnisse sowohl mit den obigen, aus den Zwischenzeiten abgeleiteten, als auch unter einander vollkommen stimmen; würde dies nicht in hinlänglichem Masse der Fall sein, so müsste man die Beobachtungen und deren Reductionen einer abermaligen Prüfung unterziehen oder sich nach einem besseren Material umsehen. Um sich Mühe zu ersparen, dürfte es daher gerathen sein, mit Zugrundelegung eines beliebigen Kreises vor allem die Dreieckverhältnisse nach beiden Seiten hin zu bestimmen und dann erst an die übrigen Vorbereitungsrechnungen zu gehen, nachdem man sich von der Güte des Beobachtungsmaterials überzeugt hat.

Auch die beobachteten Zwischenzeiten kann man auf die Probe stellen. Aus 1) und 2) in II. 6 ergibt sich nämlich

$$s^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(v'' - v') = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$

Substituiert man hier für r'^2 und r''^2 die bekannten Werte

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

so kommt nach einer kleinen Reduction

$$\sigma = r'r'' \cos(v'' - v') = x'x'' + y'y'' + z'z''$$

Setzen wir demnach der Kürze halber $r'r'' \cos(v'' - v') = \sigma$, $rr'' \cos(v'' - v) = \sigma'$, $rr' \cos(v' - v) = \sigma''$ und drücken die rechtwinkligen Coordinaten durch die geocentrischen polaren aus, so erhalten wir alles in allem:

$$\sigma = q'q'' [\operatorname{tg} \beta' \operatorname{tg} \beta'' + \cos(\lambda'' - \lambda')] - \\ - R''q' \cos(L'' - \lambda') - R'q'' \cos(L' - \lambda'') + R'R'' \cos(L'' - L')$$

$$\sigma' = \varrho\varrho''[tg\beta tg\beta'' + \cos(\lambda'' - \lambda)] - \\ - R''\varrho \cos(L'' - \lambda) - R\varrho'' \cos(L - \lambda'') + RR'' \cos(L'' - L)$$

$$\sigma'' = \varrho\varrho'[tg\beta tg\beta' + \cos(\lambda' - \lambda)] - \\ - R'\varrho \cos(L' - \lambda) - R\varrho' \cos(L - \lambda') + RR' \cos(L' - L)$$

Führt man auch in diese Ausdrücke statt $\varrho, \varrho', \varrho''$ die aus der Kreishypothese entspringenden Werte $\varrho_0, \varrho'_0, \varrho''_0$ ein, so erhält man offenbar, wenn v, v', v'' der Kreishypothese angehören,

$$\sigma = r_0^2 \cos(v'' - v'), \quad \sigma' = r_0^2 \cos(v'' - v), \quad \sigma'' = r_0^2 \cos(v' - v)$$

woraus sich

$$v'' - v' = \mu_0 \tau, \quad v'' - v = \mu_0 \tau', \quad v' - v = \mu_0 \tau''$$

nun rechnen lassen und man hat

$$\tau = \frac{v'' - v'}{\mu_0}, \quad \tau' = \frac{v'' - v}{\mu_0}, \quad \tau'' = \frac{v' - v}{\mu_0}$$

So kann man die Beobachtungen auch in dieser Beziehung prüfen, je mehr dieselben unter einander stimmen, desto zuverlässiger wird die Bahnbestimmung werden.

8.

Mit den auf die dargelegte Weise festgestellten Dreieckverhältnissen

$$n : n' : n'' = \sin(\mu_0 \tau) : \sin(\mu_0 \tau') : \sin(\mu_0 \tau'')$$

welche natürlich noch sehr falsch sein können, gehe man jetzt in 13) Art. 3 oder in die entsprechenden Ausdrücke des Art. 5 ein und bestimme so die Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$; auf Grund dieser Distanzen berechne man dann die Elemente der Bahn und zuletzt noch die Constante k , wie wir bereits gesagt haben. Unter den Elementen kommen zuerst Ω und i , die Länge des aufsteigenden Knotens und die Neigung der Bahn, an die Reihe. Dabei schlagen wir folgenden Weg ein. Aus 6) in II. 4 ergibt sich

$$tg\Omega = \frac{v''}{v'}, \quad tgi = \frac{v'}{v \cos \Omega} = \frac{v''}{v \sin \Omega}$$

Wir leiten demnach Ω und i aus den Projectionsdreiecken ab; dieser Weg ist der zunächstliegende und in Hinsicht der Planeten jedem anderen vorzuziehen. Behufs bequemerer Rechnung und damit wir im Zähler und Nenner der Ausdrücke für die Tangenten der

beiden Winkel möglichst grosse Werte bekommen, nehmen wir hier noch einige Umformungen vor. Multiplicieren wir ν , am Schlusse des vorigen Artikels mit $\sin K$, und $\nu_{,,}$ mit $\cos K$, so ist vermittelst Subtraction

$$\begin{aligned} & \nu_{,,} \cos K - \nu \sin K = \\ & = [R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \sin(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \sin(L' - K)] \operatorname{tg} J \end{aligned}$$

Multiplicieren wir hingegen ν , mit $\cos K$ und $\nu_{,,}$ mit $\sin K$, so kommt vormittelst Addition

$$\begin{aligned} & \nu_{,,} \sin K + \nu \cos K = [\varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + \\ & + R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \cos(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \cos(L' - K)] \operatorname{tg} J \end{aligned}$$

Drücken wir vermittelst der Formeln in III. 2 auf der linken Seite die beiden Projectionsdreiecke durch das entsprechende Raumdreieck aus und bringen J auf die andere Seite, so wird

$$\begin{aligned} & n \sin i \cotg J \sin(\Omega - K) = \\ & = R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \sin(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \sin(L' - K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & n \sin i \cotg J \cos(\Omega - K) = \varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + \\ & + R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \cos(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \cos(L' - K) \end{aligned}$$

Setzt man nun alles in allem, um sämtliche drei Beobachtungen zu umfassen,

$$A = R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \sin(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \sin(L' - K)$$

$$\begin{aligned} B &= \varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \cos(L'' - K) - \\ &- R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \cos(L' - K) \end{aligned}$$

$$A' = R'' \varrho \sin(\lambda - K') \sin(L'' - K') - R \varrho'' \sin(\lambda'' - K') \sin(L - K')$$

$$\begin{aligned} B' &= \varrho \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R'' \varrho \sin(\lambda - K') \cos(L'' - K') - \\ &- R \varrho'' \sin(\lambda'' - K') \cos(L - K') \end{aligned}$$

$$A'' = R' \varrho \sin(\lambda - K'') \sin(L' - K'') - R \varrho' \sin(\lambda' - K'') \sin(L - K'')$$

$$\begin{aligned} B'' &= \varrho \varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \varrho \sin(\lambda - K'') \cos(L' - K'') - \\ &- R \varrho' \sin(\lambda' - K'') \cos(L - K'') \end{aligned}$$

so ist

$$\operatorname{tg}(\Omega - K) = \frac{A}{B}; \quad \operatorname{tgi} = \frac{A \operatorname{tg} J}{\nu \sin(\Omega - K)} = \frac{B \operatorname{tg} J}{\nu \cos(\Omega - K)} \dots 1)$$

Substituiert man hier statt A, B, J, K, ν die Grössen A', B', J', K', ν' oder $A'', B'', J'', K'', \nu''$, so erhält man noch weitere Ausdrücke für Ω und i ; das meiste Zutrauen unter ihnen wird derjenige verdienen, der den grössten Zähler und Nenner besitzt. Als Probe benütze man die Gleichung:

$$q = \frac{R \sin(\Omega - L) \operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} \beta + \sin(\Omega - \lambda) \operatorname{tg} i}$$

Sind die Projectionen ν, ν', ν'' berechnet, so findet man die Raumdreiecke dann leicht aus den Formeln

$$n = \frac{\nu}{\cos i}, \quad n' = \frac{\nu'}{\cos i}, \quad n'' = \frac{\nu''}{\cos i} \dots\dots 2)$$

Weiters rechne man jetzt $\sigma, \sigma', \sigma''$ aus den Ausdrücken am Schlusse des vorigen Artikels, man hat dann

$$\left. \begin{array}{lll} r'r'' \sin(v'' - v') = n & rr'' \sin(v'' - v) = n' & rr' \sin(v' - v) = n'' \\ r'r'' \cos(v'' - v') = \sigma & rr'' \cos(v'' - v) = \sigma' & rr' \cos(v' - v) = \sigma'' \end{array} \right\} \dots\dots 3)$$

woraus man nicht nur $v'' - v', v'' - v, v' - v$, sondern auch $r'r'', rr'', rr'$ findet. Es sei nun $r'r'' = \alpha, rr'' = \beta, rr' = \gamma$, so ist

$$\begin{aligned} rr'r'' &= \sqrt{\alpha\beta\gamma} \\ r &= \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha}, \quad r' = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\beta}, \quad r'' = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\gamma} \dots\dots 4) \end{aligned}$$

Für drei verschiedene Orte hat man sodann mit Benützung der Gleichung der Ellipse

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v, \quad \frac{p}{r'} = 1 + e \cos v', \quad \frac{p}{r''} = 1 + e \cos v''$$

Multipliziert man diese Gleichungen beziehungsweise mit $\sin(v'' - v'), \sin(v'' - v), \sin(v' - v)$ und subtrahiert von der Summe der beiden äusseren so gebildeten Gleichungen die mittlere, so ergibt sich für den halben Parameter der Ellipse der bekannte Ausdruck:

$$p = \frac{4rr'r'' \sin \frac{1}{2}(v'' - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v' - v)}{n - n' + n''} \dots\dots 5)$$

Soll die Berechnung dieser Grösse eine möglichst sichere sein, so muss der Nenner $n - n' + n''$, das von den drei Sehnen eingeschlossene Dreieck, recht gross werden. Die Beobachtungen sollen

also weit auseinanderliegen, so dass $n + n''$ eine ziemlich bedeutende Summe, hingegen wo möglich $n' = 0$ wird, d. i. die den ersten mit dem dritten Orte verbindende Sehne soll durch die Sonne hindurchgehen; damit ist aber auch die Grenze erreicht, bis zu welcher vorgegangen werden darf, denn über diese Grenze hinaus wird das Dreieck n' negativ, was nicht sein darf. Weiters ist

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

$$e \cos v' = \frac{p}{r'} - 1$$

Subtrahiert und addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man nach einer kurzen und leichten Operation folgende zwei:

$$\left. \begin{aligned} e \sin \frac{1}{2}(v' + v) &= \frac{p(r' - r)}{2rr' \sin \frac{1}{2}(v' - v)} \\ e \cos \frac{1}{2}(v' + v) &= \frac{p(r' + r) - 2rr'}{2rr' \cos \frac{1}{2}(v' - v)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 6)$$

woraus $v' + v$ und e hervorgehen; ändert man hier die Accente, so ergeben sich die Formeln für $v'' + v$ und $v'' + v'$. Hiemit sind die wahren Anomalien v, v', v'' auch bekannt geworden. Von den wahren gehe man auf die excentrischen Anomalien über vermittelst der Formel

$$tg \frac{E}{2} = tg \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) tg \frac{v}{2} \dots\dots\dots 7)$$

wo $e = \sin \varphi$ gesetzt wurde. Aus E, E', E'' rechnet man dann die mittleren Anomalien

$$M = E - e \sin E = \mu t \dots\dots\dots 8)$$

wo e in Secunden des Bogens auszudrücken ist. Die mittlere tägliche Bewegung μ findet sich am zuverlässigsten aus der Verbindung der zwei entlegensten mittleren Anomalien

$$\mu = \frac{M'' - M}{t'' - t} = \frac{M'' - M}{\tau'} \dots\dots\dots 9)$$

Ferner ist

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = p \sec^2 \varphi \dots\dots\dots 10)$$

Schliesslich rechne man

$$k = \frac{\mu a^{3/2}}{\sqrt{1+m}} \dots\dots\dots 11)$$

Hiemit ist der erste Versuch zu Ende geführt; würde die hier zuletzt berechnete Constante mit dem bekannten oben aus der Erdbewegung abgeleiteten Werte

$$\lg k = 3.5500066 \text{ (in Bogensekunden)}$$

zufällig stimmen, so wäre die Bahnbestimmung auch schon beendet; allein weil dieser erste Versuch selten oder gar nie eine solche Uebereinstimmung erzielen wird, so ist man genöthigt, eine zweite Kreishypothese zugrunde zu legen. Ist k im ersten Versuche beispielsweise zu gross gekommen, so wird man r_0 , den Radius des neuen Kreises, etwas grösser nehmen, denn dann wird k kleiner werden. Die Flächengeschwindigkeit ist bei einem und demselben Planeten eine constante Grösse; ist nun in der Gleichung

$$c = k\sqrt{p(1+m)}$$

k zu vermindern, so muss dafür p wachsen, daher auch in der Kreishypothese r_0 vergrössert werden. Um wie viel r_0 geändert werden muss, damit zuletzt ein richtiges k zum Vorschein komme, lässt sich bei Beginn der zweiten Hypothese noch nicht bestimmen. Ist der Unterschied zwischen dem berechneten und wahren Werte von k bedeutend, so nehme man r_0 um 0.1 verschieden an. Nach Durchführung des zweiten Versuches hat man schon einen besseren Anhaltspunkt für die weitere Verbesserung der Kreishypothese, weil man da schon eine beiläufige Proportion bilden kann, in welcher die gesuchte Aenderung als unbekanntes Glied auftritt. Am Ende des dritten Versuches wird sich die nothwendige Aenderung schon ziemlich genau berechnen lassen; so kann die Genauigkeit beliebig weit getrieben werden, was ein Beweis für die Güte der Methode ist.

Um sich am Schlusse eines jeden Versuches überzeugen zu können, dass die Rechnung in diesem letzten Theile, wir meinen die Formeln 2 bis 11), richtig durchgeführt und nicht etwa wo ein Fehler untergelaufen ist, bedürfen wir noch einer Controle; dieselbe ergibt sich aus folgender Entwicklung. Aus 6) in II. 8, nämlich

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

folgt

$$1 - \cos^2 v = \sin^2 v = \frac{\sin^2 E (1 - e^2)}{(1 - e \cos E)^2}$$

oder wenn wieder $e = \sin \varphi$ gesetzt wird

$$\sin v = \frac{\sin E \cos \varphi}{1 - e \cos E}$$

Da $1 - e \cos E = \frac{r}{a}$ ist, so haben wir

$$\begin{aligned} r \sin v &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - \sin \varphi) \end{aligned}$$

Für einen zweiten Ort ist ebenso

$$\begin{aligned} r' \sin v' &= a \cos \varphi \sin E' \\ r' \cos v' &= a (\cos E' - \sin \varphi) \end{aligned}$$

Aus der Verbindung beider Orte ergibt sich

$$rr' \sin (v' - v) = n'' = a^2 \cos \varphi [\sin (E' - E) - \sin \varphi (\sin E' - \sin E)]$$

Weiters ist

$$M' - M = E' - E - \sin \varphi (\sin E' - \sin E) = \mu (t' - t) = \mu \tau''$$

Es wird also

$$\sin \varphi (\sin E' - \sin E) = E' - E - \mu \tau''$$

Setzt man dies oben ein und berücksichtigt auch die beiden anderen Fälle, so erhält man alles in allem

$$\begin{aligned} n &= a^2 \cos \varphi [\mu \tau - (E'' - E') + \sin (E'' - E')] \\ n' &= a^2 \cos \varphi [\mu \tau' - (E'' - E) + \sin (E'' - E)] \\ n'' &= a^2 \cos \varphi [\mu \tau'' - (E' - E) + \sin (E' - E)] \end{aligned}$$

von welchen drei Ausdrücken man den einen oder den anderen als Schlusscontrole nach einem jeden Versuche benützen wird oder auch die folgende daraus hervorgehende Gleichung für das Sehnendreieck:

$$n - n' + n'' = 4a^2 \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (E'' - E') \sin \frac{1}{2} (E'' - E) \sin \frac{1}{2} (E' - E)$$

Ist nach mehreren Versuchen die Constante k schliesslich in befriedigender Weise zustande gebracht worden, so bestimme man eines der drei Breitenargumente u , u' , u'' . Es ist aber zufolge 2) in I. 1 und 1 β) in I. 2

$$\begin{aligned} r \cos u &= r \cos b \cos (l - \Omega) = \varrho \cos (\lambda - \Omega) - R \cos (L - \Omega) \\ r \sin u \cos i &= r \cos b \sin (l - \Omega) = \varrho \sin (\lambda - \Omega) - R \sin (L - \Omega) \\ r \sin u \sin i &= r \sin b = \varrho \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

Die ersten zwei Zeilen geben

$$\operatorname{tg} u = \frac{q \sin(\lambda - \Omega) - R \sin(L - \Omega)}{\cos i [q \cos(\lambda - \Omega) - R \cos(L - \Omega)]}$$

Zuletzt findet man die Länge des Perihels aus der Gleichung

$$u = \pi + v - \Omega$$

womit die Bahnbestimmung des Planeten als definitiv beendet erscheint. Die Bahnelemente werden in üblicher Weise in einer Columnne zusammengestellt.

9.

Beispiel. Gauss theilt in seinem Werke «*Theoria motus etc.*» folgende Beobachtungen des Planeten Ceres mit; dieselben stammen aus dem Jahre 1805.

Mittl. Paris. Zeit	λ	β	L	$\lg R$
Sept. 5·51336 :	95° 32' 18·56''	— 0° 59' 34·06''	162° 54' 56·00''	0·0031514
» 139·42711 :	99 49 5·87	+ 7 16 36·80	297 12 43·25	9·9929861
» 265·39813 :	118 5 28·85	+ 7 38 49·39	61 58 50·71	0·0056974

Vor allem berechnen wir die Knotenlängen K , K' , K'' aus 9) Art. 3:

$$K = 27^{\circ} 49' 25\cdot36'' \quad \lg \operatorname{tg} J = 9\cdot1279741$$

$$K' = 98^{\circ} 4' 15\cdot57'' \quad \lg \operatorname{tg} J' = 9\cdot5934941$$

$$K'' = 96^{\circ} 2' 58\cdot49'' \quad \lg \operatorname{tg} J'' = 0\cdot2884094$$

Daran reiht sich die Berechnung von q , q' , q'' ; es ist

$$\lg q = 9\cdot9770062, \quad \lg q' = 0\cdot5300308, \quad \lg q'' = 0\cdot5140383$$

Folglich wird nach 13) Art. 3

$$q = 0\cdot6744431 + \frac{n'}{n} [9\cdot9699675] + \frac{n''}{n} [9\cdot7320248]$$

$$q' = \frac{n}{n'} [0\cdot4899065] + 1\cdot093329 - \frac{n''}{n'} [0\cdot3058867]$$

$$q'' = \frac{n}{n''} [0\cdot4807832] + \frac{n'}{n''} [0\cdot0645475] - 1\cdot8538295$$

Die Formeln in Art. 7 für die Projectionen der xy - oder Ekliptik-ebene geben

$$v = q' q'' [9\cdot4963010] + q'' [8\cdot1789999] + q' [9\cdot7934587] + 0\cdot8189741$$

$$v' = q q'' [9\cdot5838057] + q'' [9\cdot8512999] + q [9\cdot7482474] - 1\cdot0020539$$

$$v'' = q q' [8\cdot8728977] + q' [9\cdot9534071] + q [9\cdot5603858] + 0\cdot7093985$$

Aus Art. 8 hat man

$$A = \varrho' [9.7332115] + \varrho'' [9.9929567]$$

$$B = \varrho' \varrho'' [9.4963010] + \varrho' [9.9016592] + \varrho'' [8.0217814]$$

Zuletzt ist

$$\sigma = \varrho' \varrho'' [9.9852998] - \varrho' [9.9031888] + \varrho'' [9.9929349] - 0.56853947$$

$$\sigma' = \varrho \varrho'' [9.9643536] - \varrho [9.9265140] - \varrho'' [9.8539648] - 0.19359653$$

$$\sigma'' = \varrho \varrho' [9.9978226] + \varrho [9.9611436] - \varrho' [9.6587483] - 0.69218762$$

wo die eingeklammerten Zahlen durchgehends Logarithmen sind. Wir hätten ebenso für A' , B' ; A'' , B'' die entsprechenden Ausdrücke aufstellen können; wir begnügen uns indessen mit A und B , da A ziemlich hohe Coëfficienten besitzt und die einzelnen Glieder alle positiv ausgefallen sind.

$$t'' - t' = \tau = 125.97102 \text{ Tage, } \lg k\tau = 5.6502772 \text{ in Secunden,}$$

$$t'' - t = \tau' = 259.88477 \quad \gg \quad \lg k\tau' = 5.9647875 \quad \gg \quad \gg$$

$$t' - t = \tau'' = 133.91375 \quad \gg \quad \lg k\tau'' = 5.6768317 \quad \gg \quad \gg$$

I. Hypothese, $r_0 = 2.5$.

$$\lg k\tau = 5.6502772 \quad \lg k\tau' = 5.9647875 \quad \lg k\tau'' = 5.6768317$$

$$\lg r_0^{3/2} = 0.5969100 \quad \quad \quad 0.5969100 \quad \quad \quad 0.5969100$$

$$\lg \mu_0 \tau = 5.0533672 \quad \lg \mu_0 \tau' = 5.3678775 \quad \lg \mu_0 \tau'' = 5.0799217$$

$$\mu_0 \tau = 113075.2'' = 31^\circ 24' 35.2'' \quad \lg \sin \mu_0 \tau = 9.7169671$$

$$\mu_0 \tau' = 233280'' = 64^\circ 48' 0'' \quad \lg \sin \mu_0 \tau' = 9.9565656$$

$$\mu_0 \tau'' = 120204.8'' = 33^\circ 23' 24.8'' \quad \lg \sin \mu_0 \tau'' = 9.7406297$$

Demzufolge ist z. B. $\lg \frac{n}{n'} = 9.7604015$, $\lg \frac{n''}{n'} = 9.7840641$.

Wir können aber diese Kreishypothese noch auf eine andere Art bilden. Wenn wir in Art. 7 für r_0 den Wert 2.5 einführen, so erhalten wir

$$\lg \varrho_0 = 0.4325945, \quad \lg \varrho_0' = 0.1863605, \quad \lg \varrho_0'' = 0.4604609$$

Mit diesen dem Kreise angehörigen Distanzen berechnen wir jetzt die Projectionen der Ekliptikebene ν , ν' , ν'' , welche Buchstaben eigentlich auch mit dem Index $_0$ zu versehen wären; es kommt

$$\lg \nu_0 = 0.5061682, \quad \lg \nu_0' = 0.7452842, \quad \lg \nu_0'' = 0.5293484$$

Darnach aber wird $lg \frac{n}{n'} = 9.7608840$, $lg \frac{n''}{n'} = 9.7840642$.

Die geringe Uebereinstimmung in $log \frac{n}{n'}$ zeigt, dass die Beobachtungen fehlerhaft sind.

Mit diesen letzteren Dreieckverhältnissen erhält man aus 13) in III. 3

$$lg \varrho = 0.4566630, \quad lg \varrho' = 0.2160917, \quad lg \varrho'' = 0.4656672$$

Berechnet man mit diesen Distanzen die Grössen v , v' , v'' , so kommt jetzt

$$lg v = 0.5304745, \quad lg v' = 0.7695907, \quad lg v'' = 0.5536546$$

Es wird ferner auf Grund der so erhaltenen Distanzen

$$\begin{array}{lll} lg A = 0.5757339 & \Omega - K = 52^\circ 52' 59.36'' & lg A = 0.5757339 \\ lg B = 0.4546900 & K = 27^\circ 49' 25.36'' & lg tg J = 9.1279741 \\ lg tg(\Omega - K) = 0.1210439 & \Omega = 80^\circ 42' 24.72'' & 9.7037080 \\ & & lg v = 0.5304745 \\ & & lg \sin(\Omega - K) = 9.9016798 \\ i = 10^\circ 35' 6.4'' & & lg tg i = 9.2715537 \end{array}$$

Dividiert man die Projectionsdreiecke v , v' , v'' mit $\cos i$, so ergeben sich die Raumdreiecke:

$$\begin{array}{lll} lg n = 0.5379284 & lg n' = 0.7770446 & lg n'' = 0.5611085 \\ n = 3.4508682 & n' = 5.9847306 & n'' = 3.6400597 \\ n - n' + n'' = 1.1061973, & & lg(n - n' + n'') = 0.0438326 \end{array}$$

Weiters findet man

$$lg \sigma = 0.7509656, \quad lg \sigma' = 0.4779682, \quad lg \sigma'' = 0.7678076$$

Darnach wird

$$\begin{array}{ll} v'' - v' = 31^\circ 28' 44.59'', & v'' - v = 63^\circ 19' 54.17'' \\ & v' - v = 31^\circ 51' 9.58'' \end{array}$$

$$lg r = 0.4222403, \quad lg r' = 0.4164510, \quad lg r'' = 0.4036516$$

Die weitere Rechnung nach den Formeln des Art. 8 liefert

$$\begin{array}{lll} lg p = 0.3924790 & & \\ v'' = 247^\circ 30' 53.8'' & v' = 216^\circ 2' 9.2'' & v = 184^\circ 11' 0'' \\ lg e = 8.8222284 & \varphi = 3^\circ 48' 28'' & lg a = 0.3943986 \end{array}$$

Dann werden die excentrischen Anomalien

$$E = 184^{\circ}28'14.3'', \quad E' = 218^{\circ}20'18.6'', \quad E'' = 251^{\circ}4'43.4''$$

Die Kepler'sche Gleichung gibt ferner

$$M = 184^{\circ}46'2'', \quad M'' = 254^{\circ}40'41.1''$$

demnach

$$M'' - M = \mu\tau' = 251679.1'', \quad \lg \mu = 2.9860662$$

$$\lg k = 3.5776641$$

Probe:

$\mu\tau' = 251679.1''$	$\mu\tau' + \sin(E'' - E) - (E'' - E) = 201202'', \lg = 5.3036323$
$\sin(E'' - E) = 189312.0''$	$\lg 206264.8 = 5.3144251$
$440991.1''$	9.9892072
$E'' - E = 239789.1''$	$\lg a^2 = 0.7887972$
$201202''$	$\lg \cos \varphi = 9.9990402$
	$\lg n' = 0.7770446$

ganz übereinstimmend mit dem obigen.

Weil $\lg k$ hier um vieles zu gross gekommen ist, so sei für die zweite Hypothese $r_0 = 2.6$. Um das Verfahren etwas abzukürzen, werden wir in dieser und in den folgenden Hypothesen bloss die den Zwischenzeiten entlehnten Dreieckverhältnisse in Anwendung bringen, welches Verfahren, abgesehen von der Kürze, auch deswegen rathsamer ist, da dadurch das gesammte Beobachtungsmaterial in Rechnung kommt.

II. Hypothese, $r_0 = 2.6$.

$$\mu_0\tau = 29^{\circ}36'54.73'', \quad \mu_0\tau' = 61^{\circ}5'51.78'', \quad \mu_0\tau'' = 31^{\circ}28'57''$$

$$\lg \sin \mu_0\tau = 9.6938785, \quad \lg \sin \mu_0\tau' = 9.9422290$$

$$\lg \sin \mu_0\tau'' = 9.7178686$$

Mit Einführung dieser Dreieckverhältnisse werden

$$\lg \varrho = 0.4620682, \quad \lg \varrho' = 0.2124193, \quad \lg \varrho'' = 0.4704005$$

die Projectionen der Ekliptikebene

$$\lg v = 0.5299059, \quad \lg v' = 0.7782565, \quad \lg v'' = 0.5538960$$

Länge des aufsteigenden Knotens und Neigung

$$\Omega = 80^{\circ}57'0.5'', \quad i = 10^{\circ}37'53.17'', \quad \text{ferner}$$

$$v'' - v' = 31^{\circ}12'25.56'', \quad v'' - v = 62^{\circ}49'34.38''$$

$$v' - v = 31^{\circ}37'8.81''$$

$$\lg r = 0.4277226, \quad \lg r' = 0.4141381, \quad \lg r'' = 0.4088463$$

$$\lg p = 0.4421081$$

$$v'' = -2^{\circ}9'41.74'', \quad v = -64^{\circ}59'16.12''$$

$$\lg e = 8.9012082, \quad \varphi = 4^{\circ}34'7.26'', \quad \lg a = 0.4448723$$

$$E'' = -1^{\circ}59'44.85'' \quad E = -60^{\circ}54'57.14''$$

$$M'' = -1^{\circ}50'12.67'' \quad M = -56^{\circ}55'39.0''$$

Es ist also:

$$M'' - M = \mu\tau' = 55^{\circ}5'26.33''$$

$$\begin{aligned} \lg \mu\tau' &= 5.2973804 \\ \lg \tau' &= 2.4147809 \\ \lg \mu &= 2.8825995 \\ \lg a^{3/2} &= 0.6673087 \\ \lg k &= 3.5499082 \end{aligned}$$

Oben sowie hier zur Probe bekommt man $\lg n' = 0.7857762$.

Man sieht, dass wir dem wahren Werte $\lg k = 3.5500066$ in dieser Hypothese sehr nahe gekommen sind, und dass es nur einer kleinen Aenderung von $r_0 = 2.6$ bedarf, um die Wahrheit zu treffen; weil hier $\lg k$ zu klein geworden ist, so müssen wir um wenig zurückgehen und nehmen deshalb $r_0 = 2.599$ als Grundlage der folgenden

III. Hypothese, $r_0 = 2.599$.

Es wird

$$\mu_0\tau = 29^{\circ}37'56.24'', \quad \mu_0\tau' = 61^{\circ}7'58.69'', \quad \mu_0\tau'' = 31^{\circ}30'2.38''$$

$$\lg \sin \mu_0\tau = 9.6941064, \quad \lg \sin \mu_0\tau' = 9.9423764$$

$$\lg \sin \mu_0\tau'' = 9.7180933$$

$$\lg \varrho = 0.4620215 \quad \lg \varrho' = 0.2124481 \quad \lg \varrho'' = 0.4703527$$

$$\lg v = 0.5299054 \quad \lg v' = 0.7781755 \quad \lg v'' = 0.5538923$$

$$\Omega = 80^{\circ}56'53.075'', \quad i = 10^{\circ}37'51.64''$$

$$\lg n = 0.5374245, \quad \lg n' = 0.7856946, \quad \lg n'' = 0.5614114$$

$$v'' - v' = 31^{\circ}12'35.12'', \quad v'' - v = 62^{\circ}49'51.27''$$

$$v' - v = 31^{\circ}37'16.15''$$

$$\lg r = 0.4276752, \quad \lg r' = 0.4141561, \quad \lg r'' = 0.4087939$$

$$\lg p = 0.4416316$$

$$v'' = -2^{\circ}37'38.85'', \quad v = -65^{\circ}27'30.13''$$

$$\lg e = 8.8955671, \quad \varphi = 4^{\circ}30'34.57'', \quad \lg a = 0.4443248$$

$$\begin{array}{ll} E'' = -2^{\circ}25'42.42'' & E = -61^{\circ}25'18.28'' \\ M'' = -2^{\circ}14'15.24'' & M = -57^{\circ}27'56.38'' \end{array}$$

Somit

$$\begin{array}{ll} M'' - M = 55^{\circ}13'41.14'' = 198821.14'' = \mu\tau' & \lg \mu\tau' = 5.2984626 \\ \text{zur Probe:} & \lg \tau' = 2.4147809 \\ \lg n' = 0.7856945 & \lg \mu = 2.8836817 \\ & \lg a^{3/2} = 0.6664872 \\ & \lg k = 3.5501689 \end{array}$$

Behufs Bildung der nächsten Hypothese stellen wir folgende Berechnung zusammen:

$$\begin{array}{lll} 2.6 & 3.5501689 & 3.5500066 \\ 2.599 & 3.5499082 & 3.5499082 \\ \hline 0.001 & : & 2607 = x : & 984 \text{ oder in Worten:} \end{array}$$

Wenn bei einer Aenderung von r_0 um 0.001 der log. von k eine Bewegung von 2607 in der siebenten Decimale macht, um wie viel wird man in der Hypothese $r_0 = 2.6$ zurückgehen müssen, um im $\lg k$ eine Bewegung von 984 nach vorwärts zu erzeugen?

Es ist aber

$$\frac{984 \times 0.001}{2607} = 0.0003774, \quad \begin{array}{l} 2.6 \\ 0.0003774 \\ \hline r_0 = 2.5996226 \end{array}$$

IV. Hypothese, $r_0 = 2.5996226$.

$$\mu_0\tau = 29^{\circ}37'17.94'', \quad \mu_0\tau' = 61^{\circ}6'39.65'', \quad \mu_0\tau'' = 31^{\circ}29'21.67''$$

$$\lg \sin \mu_0\tau = 9.6939646, \quad \lg \sin \mu_0\tau' = 9.9422846$$

$$\lg \sin \mu_0\tau'' = 9.7179533$$

$$\text{Demnach wird } \lg \frac{n}{n'} = 9.7516800, \quad \lg \frac{n''}{n'} = 9.7756687$$

$$\lg \varrho = 0.4620505 \quad \lg \varrho' = 0.2124302 \quad \lg \varrho'' = 0.4703827$$

$$\lg \nu = 0.5299059 \quad \lg \nu' = 0.7782260 \quad \lg \nu'' = 0.5538946$$

$$\Omega = 80^{\circ}56'56.75'', \quad i = 10^{\circ}37'52.73''$$

$$\lg n = 0.5374255 \quad \lg n' = 0.7857456 \quad \lg n'' = 0.5614142$$

$$\lg \sigma = 0.7550856 \quad \lg \sigma' = 0.4961278 \quad \lg \sigma'' = 0.7720572$$

$$v'' - v' = 31^{\circ}12'29.18'', \quad v'' - v = 62^{\circ}49'40.75''$$

$$v' - v = 31^{\circ}37'11.61''$$

$$\lg r = 0.4277048, \quad \lg r' = 0.4141449, \quad \lg r'' = 0.4088268$$

$$\lg p = 0.4419290$$

$$v = -65^{\circ}9'47.35'', \quad v'' = -2^{\circ}20'6.59''$$

$$\lg e = 8.8990897, \quad \varphi = 4^{\circ}32'47.06'', \quad \lg a = 0.4446664$$

$$E = -61^{\circ}6'16.17'' \quad E'' = -2^{\circ}9'24.82''$$

$$M = -57^{\circ}7'41.8'' \quad M'' = -1^{\circ}59'9.48''$$

$$M'' - M = \mu\tau' = 55^{\circ}8'32.32'' = 198512.32'' \quad \lg \mu\tau' = 5.2977875$$

$$\lg \tau' = 2.4147809$$

$$\text{als Probe kommt } \lg n' = 0.7857457$$

$$\lg \mu = 2.8830066$$

$$\lg a^{3/2} = 0.6669996$$

$$\lg k = 3.5500062$$

Sonach ist $\lg k$ um vier Einheiten in der siebenten Decimalstelle zu klein gekommen; die hier berechneten Elemente sind also schon ziemlich genau.

Wir würden uns jetzt die Mühe nehmen und noch eine fünfte Hypothese durchrechnen, wenn es sich nicht oben in der ersten Hypothese gezeigt hätte, dass die Beobachtungen unter einander nicht ganz stimmen. Wir begnügen uns daher mit diesen Bahnelementen und rechnen zum Schlusse noch π , die Länge des Perihels.

$$u = -5^{\circ}50'4.65'', \quad \pi = 140^{\circ}16'39.45''$$

Wenn die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne mit U bezeichnet wird, so ist $U = \frac{360^{\circ}}{\mu} = \frac{1296000''}{\mu}$; in unserem Falle ist $U = 1696.6722$ Tage. Die Bahnelemente zusammengestellt sind demnach:

$$\Omega = 80^{\circ}56'56.75''$$

$$i = 10^{\circ}37'52.73''$$

$$\pi = 140^{\circ}16'39.45''$$

$$\varphi = 4^{\circ}32'47.06''$$

$$a = 2.783982$$

$$M = 302^{\circ}52'18.2'', \text{ Epoche 1805, Sept. 5.51336,}$$

$$\text{Mittl.tägl.Bewegung } \mu = 763.8474''$$

Paris.

10.

Bahnbestimmung der Kometen.

Bei Ellipsen mit bedeutender Excentricität ist der Differentialquotient

$$\frac{dr}{dt} = k \sqrt{1+m} \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}} = \frac{k \operatorname{tg} \varphi \sin v}{\sqrt{a}} \sqrt{1+m}$$

wenigstens in der Nähe des Perihels, in welcher Gegend die Kometen sichtbar werden, nicht mehr so klein, dass wir die in Art. 7 für n, n', n'' entwickelten Reihen für convergent halten und den dort angewendeten Kunstgriff der Restbestimmung uns erlauben dürften. Es ist zwar zur Zeit des Perihels selbst $v = 0$, daher $\sin v = 0$ und $\frac{dr}{dt} = 0$, allein weil sich der Komet die betreffenden Tage mit ungeheurerer Bogengeschwindigkeit bewegt und zur Zurücklegung von 180° nur wenige Tage braucht, so wird $\sin v$ bald in der Nähe von ± 1 sein und der obige Differentialquotient die meiste Zeit der Erscheinung eines Kometen einen bedeutenden Wert besitzen. Die obigen Reihen für n, n', n'' erweisen sich daher hier als unbrauchbar, und es stellt sich die Nothwendigkeit heraus, nach einem anderen Hilfsmittel behufs Bestimmung der Dreieckverhältnisse $n : n' : n''$ uns umzusehen. Wie wir oben bei Ellipsen mit geringer Excentricität zum Kreise unsere Zuflucht genommen, ebenso liegt es hier nahe, unbewusst zu einer Parabelhypothese zu greifen als dem anderen Grenzfalle der Ellipse. Doch ist die Bildung einer Parabelhypothese mit ungleich grösseren Schwierigkeiten verbunden als die einer Kreishypothese; das Verfahren, welches wir oben in Art. 6 in Hinsicht des Kreises eingeschlagen haben, ist hier unmöglich, ausser wir wüssten im vorhinein ein bestimmtes Verhältniss für die Radienvectoren $r : r' : r''$ anzugeben, um darnach aus 1) in Art. 6 die geocentrischen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ und mit Hilfe derselben die Projectionen ν, ν', ν'' berechnen zu können. Es ist aber überhaupt erst der Beweis herzustellen, dass in unserem Falle eine Parabelhypothese erlaubt ist und da müssen wir etwas weiter ausholen, und zwar handelt es sich zunächst um die Ableitung der Lambert'schen Gleichung.

Aus 6) in II. 8, nämlich

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \dots \dots \dots 1)$$

ergeben sich, wenn $1 - \cos v$ und $1 + \cos v$ entwickelt wird, und wenn man bedenkt, dass

$$r = a(1 - e \cos E) \dots \dots \dots 2)$$

ist, folgende zwei Gleichungen:

$$\sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{E}{2} \quad \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{E}{2}$$

Für einen zweiten Ort ist analog

$$\sqrt{r'} \sin \frac{v'}{2} = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{E'}{2} \quad \sqrt{r'} \cos \frac{v'}{2} = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{E'}{2}$$

Daraus folgt

$$\sqrt{rr'} \sin \frac{v'}{2} \sin \frac{v}{2} = a(1 + e) \sin \frac{E'}{2} \sin \frac{E}{2}$$

$$\sqrt{rr'} \cos \frac{v'}{2} \cos \frac{v}{2} = a(1 - e) \cos \frac{E'}{2} \cos \frac{E}{2}$$

mithin

$$\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v) = a \cos \frac{1}{2}(E' - E) - ae \cos \frac{1}{2}(E' + E)$$

Weiters ergibt sich aus 2) auf leichte Weise:

$$r + r' = 2a \left[1 - e \cos \frac{1}{2}(E' + E) \cos \frac{1}{2}(E' - E) \right]$$

Setzt man in den vorstehenden zwei Gleichungen $\frac{1}{2}(E' - E) = g$, $\frac{1}{2}(E' + E) = G$, $e \cos \frac{1}{2}(E' + E) = e \cos G = \cos h$, so wird

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v) &= a(\cos g - \cos h) \\ r + r' &= 2a(1 - \cos g \cos h) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

Weil in der Ellipse, der diese zwei Gleichungen eben gelten, $e < 1$ ist, so ist es gewiss erlaubt, $e \cos G = \cos h$ zu setzen; dabei kann e ziemlich gross werden und selbst bis zu seiner Grenze, der Einheit, vorschreiten; da ferner bei einer Bahnbestimmung die helio-centrische Bewegung des Himmelskörpers nie über 180° betragen darf, wie wir dies oben gesehen haben, so ist in unserem Falle $\cos \frac{1}{2}(v' - v)$ stets positiv, und weil auch $\sqrt{rr'}$ eine wesentlich positive Grösse ist, so muss $\cos g > \cos h$ oder $h > g$ sein.

Bedeutet s'' die Sehne, welche die zwei Orte P und P' verbindet, so ist nach dem Carnot'schen Satze

$$s''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v) \quad \text{und}$$

$$0 = 2rr' - 2rr'$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so kommt

$$s''^2 = (r + r')^2 - 4rr' \cos^2 \frac{1}{2}(v' - v)$$

oder vermöge der eben entwickelten Gleichungen 3)

$$s''^2 = 4a^2(1 - \cos g \cos h)^2 - 4a^2(\cos g - \cos h)^2$$

Führt man die angezeigten Operationen aus, so erscheint

$$s'' = 2a \sin g \sin h \dots\dots\dots 4)$$

aus 3) hat man $r + r' = 2a(1 - \cos g \cos h)$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt mittelst Addition und Subtraction:

$$r + r' + s'' = 4a \sin^2 \frac{1}{2}(h + g)$$

$$r + r' - s'' = 4a \sin^2 \frac{1}{2}(h - g)$$

Setzt man $h + g = \delta$, $h - g = \delta'$, so wird

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\delta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{r + r' + s''}{4a}} \\ \sin \frac{\delta'}{2} &= \pm \sqrt{\frac{r + r' - s''}{4a}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 5)$$

Da bei rechtläufiger Bewegung der Himmelskörper die drei Anomalien v , E , M wachsen, bei rückläufiger hingegen abnehmen, so ist in 4) $\sin g$ positiv bei rechtläufiger, negativ bei rückläufiger Bewegung; weil ferner s'' immer eine positive Grösse ist, so haben $\sin g$ und $\sin h$ stets gleiche Bezeichnung. Ebenso erhellt aus der Gleichung

$$\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v) = 2a \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta'}{2}$$

dass $\sin \frac{\delta}{2}$ und $\sin \frac{\delta'}{2}$ stets gleichbezeichnet sein müssen; daher gilt in 5) das positive Zeichen für die rechtläufige, das negative für die rückläufige Bewegung. — Den Entwicklungen am Schlusse des Art. 8 (Seite 83) gemäss ist aber

$$M' - M = \mu\tau'' = 2g - 2 \sin g \cos G \sin g = 2g - 2 \sin g \cos h$$

oder

$$\mu\tau'' = 2g - \sin(h + g) + \sin(h - g)$$

daher

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}(t' - t) = \delta - \delta' - \sin \delta + \sin \delta' \dots\dots\dots 6)$$

Es lässt sich nun $\delta = \sin \delta$ und $\delta' = \sin \delta'$ in Reihen nach fortschreitenden Potenzen von $\sin \frac{\delta}{2}$ und $\sin \frac{\delta'}{2}$ entwickeln, wofür dann die Ausdrücke in 5) zu substituieren sind. Es ist nämlich

$$\delta = 2 \cdot \frac{\delta}{2}, \quad \sin \delta = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} = 2 \sin \frac{\delta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

also

$$\delta - \sin \delta = 2 \left(\frac{\delta}{2} - \sin \frac{\delta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) \dots \dots \alpha)$$

Nach einer bekannten Reihenentwicklung haben wir zunächst

$$\frac{\delta}{2} = \sin \frac{\delta}{2} + \frac{\sin^3 \frac{\delta}{2}}{2 \cdot 3} + \frac{3 \sin^5 \frac{\delta}{2}}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \sin^7 \frac{\delta}{2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \sin^9 \frac{\delta}{2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \beta)$$

Weiters ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}} &= \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^{1/2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \sin^4 \frac{\delta}{2} - \frac{1}{16} \sin^6 \frac{\delta}{2} - \frac{5}{128} \sin^8 \frac{\delta}{2} - \dots \end{aligned}$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} \sin \frac{\delta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}} &= \\ &= \sin \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \sin^3 \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \sin^5 \frac{\delta}{2} - \frac{1}{16} \sin^7 \frac{\delta}{2} - \frac{5}{128} \sin^9 \frac{\delta}{2} - \dots \gamma) \end{aligned}$$

Subtrahiert man jetzt $\gamma)$ von $\beta)$ und multipliciert mit 2, so ist

$$\delta - \sin \delta = \frac{4}{3} \sin^3 \frac{\delta}{2} + \frac{2}{5} \sin^5 \frac{\delta}{2} + \frac{3}{14} \sin^7 \frac{\delta}{2} + \frac{5}{72} \sin^9 \frac{\delta}{2} + \dots$$

Versehen wir hier δ mit einem Accente, so erhalten wir die entsprechende Reihe für $\delta' = \sin \delta'$; substituieren wir dann auf der rechten Seite für $\sin \frac{\delta}{2}$ und $\sin \frac{\delta'}{2}$ die Werte aus 5), so ist

$$\begin{aligned} \delta - \sin \delta &= \frac{4}{3} \left(\frac{r + r' + s''}{4a} \right)^{3/2} + \frac{2}{5} \left(\frac{r + r' + s''}{4a} \right)^{5/2} + \\ &+ \frac{3}{14} \left(\frac{r + r' + s''}{4a} \right)^{7/2} + \frac{5}{72} \left(\frac{r + r' + s''}{4a} \right)^{9/2} + \dots \end{aligned}$$

$$\delta' - \sin \delta' = \frac{4}{3} \left(\frac{r + r' - s''}{4a} \right)^{3/2} + \frac{2}{5} \left(\frac{r + r' - s''}{4a} \right)^{5/2} + \\ + \frac{3}{14} \left(\frac{r + r' - s''}{4a} \right)^{7/2} + \frac{5}{72} \left(\frac{r + r' - s''}{4a} \right)^{9/2} + \dots$$

Subtrahieren wir von der ersten Gleichung die zweite, so wird in Rücksicht auf 6) nach einigen leichten Zwischenoperationen:

$$k(t' - t) \sqrt{1 + m} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} [(r + r' + s'')^{3/2} - (r + r' - s'')^{3/2}] + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{5a} [(r + r' + s'')^{5/2} - (r + r' - s'')^{5/2}] + \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{7a^2} [(r + r' + s'')^{7/2} - (r + r' - s'')^{7/2}] + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{9a^3} [(r + r' + s'')^{9/2} - (r + r' - s'')^{9/2}] + \dots \quad 7)$$

Dies ist die sogenannte Lambert'sche Gleichung, welche für die Beurtheilung der Verhältnisse, wie sie in einer Ellipse mit bedeutender Excentricität stattfinden, am ehesten massgebend sein wird. Der Hauptzweck derselben besteht nicht in der Rechnung, wie man bisher glaubte, sondern sie dient vornehmlich der analytischen Untersuchung. Vor allen ist leicht einzusehen, dass die Bedingung für die Convergenz der vorliegenden Reihe sich desto günstiger gestalten muss, je bedeutender a , die grosse Halbachse der Ellipse, wird. Es wird aber a gross, wenn die Excentricität der Ellipse ihrer Grenze der Einheit sich zuneigt. Aus dem allgemeinen Ausdruck für die Excentricität einer Ellipse

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

ist ersichtlich, dass bei constanter kleiner Halbachse oder bei constantem Parameter e desto mehr zunimmt, je grösser a wird; ist a unendlich gross, so wird $e = 1$, d. h. die Ellipse geht in eine Parabel über. Umgekehrt werden Ellipsen mit bedeutender Excentricität auch namhafte grosse Halbachsen besitzen; befindet sich nebstbei der Himmelskörper (Komet) in der Nähe des Perihels, wo die Radienvectoren kleiner als die Einheit werden, so convergiert unsere Reihe ausserordentlich schnell, ja es werden bei Kometen, die sich in sehr lang-

gestreckten Ellipsen bewegen, zur Zeit ihrer Sichtbarkeit die Glieder, welche α enthalten, so klein, dass sie beinahe ganz verschwinden, und es ist sehr nahe

$$6k(t' - t)\sqrt{1+m} = (r + r' + s'')^{3/2} - (r + r' - s'')^{3/2}$$

was die sogenannte Euler'sche Gleichung ist und der Parabel gilt, wie wir gleich weiter unten sehen werden. Aus dem Gesagten geht schon hervor, dass die Beobachtungen eines Kometen meistens auf eine Parabel führen werden, und dass man, um auf die wahre Bahn, die Ellipse, zu kommen, Beobachtungen verbinden müsste, wovon wenigstens eine möglichst weit vom Perihel liegt, was aber nicht immer leicht zu erreichen ist, namentlich bei neuentdeckten Kometen.

Wir wollen aber hier der Allgemeinheit halber annehmen, dass die mit α behafteten Glieder einen nicht zu vernachlässigenden Betrag darstellen, dass uns also ein Beobachtungsmaterial zu Gebote steht, welches günstig genug ist, um daraus die wahre Bahn des Kometen, die Ellipse, abzuleiten. Damit die heliocentrische Bewegung nicht über 180° gehe, müssen drei Beobachtungen ausgewählt werden, die sämtlich auf ein und derselben Seite des Perihels liegen. Weil bei Kometen zur Zeit ihrer Erscheinung die Glieder, welche α enthalten, schon sehr klein sind und die Reihe 7) demnach rasch convergiert, so kann der Betrag, den besagte Glieder alle zusammen repräsentieren, dadurch aufgewogen werden, dass man die ersten zwei Glieder, in denen α nicht vorkommt, ein wenig ändert, indem man sie mit einem von der Einheit mehr oder weniger verschiedenen Factor multipliciert; es sei dieser Factor α , so geht unter den gemachten Voraussetzungen die Reihe 7) über in

$$6k(t' - t)\sqrt{1+m} = \alpha [(r + r' + s'')^{3/2} - (r + r' - s'')^{3/2}]$$

Setzt man $\beta^{3/2} = \alpha$ und $r_0 = r\beta$, $r'_0 = r'\beta$, $s''_0 = s''\beta$, so ist

$$6k(t' - t)\sqrt{1+m} = (r_0 + r'_0 + s''_0)^{3/2} - (r_0 + r'_0 - s''_0)^{3/2}$$

die Gleichung der der Ellipse supponierten Parabel; weil

$$r_0 : r'_0 : s''_0 = r : r' : s''$$

so bilden die drei Seiten r_0 , r'_0 , s''_0 ebenfalls ein Dreieck, welches dem in der Ellipse von den drei Seiten r , r' , s'' gebildeten, in der Zwischenzeit $t' - t$ beschriebenen, ähnlich ist; wenn wir die doppelte

Fläche des Parabeldreieckes mit n_0'' , die des Ellipsendreieckes wie sonst mit n'' bezeichnen, so besteht infolge der Aehnlichkeit, wie ein Satz aus der Planimetrie lehrt, die Proportion:

$$r_0^2 : r^2 = r_0'^2 : r'^2 = n_0'' : n''$$

Nehmen wir jetzt das von den Orten P und P'' und dem Mittelpunkte der Sonne gebildete Dreieck in der Ellipse; die Seiten desselben sind r, r'', s' , wo s' die den ersten mit dem dritten Orte verbindende Sehne bezeichnet. Die Gleichung der supponierten Parabel lautet dann

$$6k(t'' - t)\sqrt{1 + m} = (r_0 + r_0'' + s_0')^{3/2} - (r_0 + r_0'' - s_0')^{3/2}$$

wo also r, r'', s' mit einem gewissen Factor multipliciert erscheinen, um damit die noch folgenden Glieder der Reihe 7) zu compensieren; dieser Factor kann nur das obige β sein, denn da

$$r_0 : r_0'' : s_0' = r : r'' : s'$$

und von früherher $r_0 = r\beta$ ist, so muss auch $r_0'' = r''\beta, s_0' = s'\beta$ sein, wenn überhaupt eine Continuität herrschen und die einer und derselben Ebene angehörigen Dreiecke anschliessen sollen. Bezeichnen wir unserer Gewohnheit gemäss dieses Ellipsendreieck, doppelt genommen, mit n' , das entsprechende ihm ähnliche Parabeldreieck mit n_0' , so wird sein

$$r_0^2 : r^2 = r_0''^2 : r''^2 = n_0' : n'$$

mithin

$$r^2 : r_0^2 = n' : n_0' = n'' : n_0''$$

oder

$$n' : n'' = n_0' : n_0''$$

Zieht man auf diese Weise auch das dritte Ellipsen- und Parabeldreieck n und n_0 heran, so ergibt sich im ganzen

$$n : n' : n'' = n_0 : n_0' : n_0''$$

Die vom Kometen in der Ellipse beschriebenen drei Dreiecke verhalten sich demgemäss gerade so zu einander, wie die in der supponierten Parabel auf die angegebene Weise entstandenen. Die beiden (durch alle Dreiecke zusammengekommen) gebildeten Vierecke, eines in der Ellipse, das andere in der Parabel, sind demnach auch ein-

ander ähnlich; der Exponent der Seitenverhältnisse ist β , der des Flächenverhältnisses β^2 ; auch ist es klar, dass wegen der Aehnlichkeit der beiden Figuren die Unterschiede in den wahren Anomalien in der Ellipse denen in der supponierten Parabel gleich sein müssen. Hiemit ist die Annahme einer Parabelhypothese für die Bestimmung der Dreieckverhältnisse $n : n' : n''$ in einer gestreckten Ellipse genug scharf begründet.

Es handelt sich jetzt darum, wie diese Parabelhypothese gebildet, wie die drei Dreiecke n_0, n_0', n_0'' oder doch ihre Verhältnisse eruiert werden sollen; wir wissen nur soviel, dass diese Dreiecke denen in der Ellipse ähnlich sein und dass die Seiten derselben die oben aufgestellte Euler'sche Gleichung befriedigen müssen. Um der ersten Forderung zu genügen, ist es nothwendig, dass wir die Verhältnisse, in welchen die Seiten der Ellipsendreiecke zu einander stehen, festsetzen, um sie dann auf die Seiten der Parabeldreiecke zu übertragen. Die Eruierung nun dieser Seitenverhältnisse ist unsere nächste Aufgabe; direct können wir diese Bestimmung nicht ausführen, sondern müssen an die aus der Beobachtung und sonst gegebenen Daten anknüpfen; aber auch so wird begreiflicherweise eine erste Bestimmung dieser Verhältnisse unvollkommen sein, weil uns genügende Anhaltspunkte fehlen, auch hier werden mehrere Versuche nothwendig sein, bis wir das Richtige treffen. Da die Seiten der Ellipsendreiecke als Functionen der Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ angesehen werden können, so wird man aus den Verhältnissen $\varrho : \varrho' : \varrho''$ auch die Verhältnisse jener Seiten abzuleiten imstande sein, so dass wir unsere Aufgabe zunächst auf die Bestimmung der Verhältnisse $\varrho : \varrho' : \varrho''$ beschränken.

Für das Verhältniss $\varrho : \varrho''$ hat bekanntlich Olbers eine bis jetzt fast ausschliesslich im Gebrauch stehende Formel aufgestellt, und auch wir könnten uns für den ersten Versuch mit derselben begnügen, da wir, so falsch auch die ersten Annahmen sein mögen, durch Wiederholung der Versuche schliesslich denn doch auf die Wahrheit kommen müssen, vorausgesetzt, dass die Methode, die wir befolgen, gut ist; indessen wir schlagen ein von der Olbers'schen Methode ganz abweichendes Verfahren ein, welches sich als einfacher und fruchtbringender erweisen wird. Wir hatten in Art. 8 gefunden:

$$\begin{aligned} n \sin i \cotg J \sin(\Omega - K) &= \\ &= R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \sin(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \sin(L' - K) \\ n \sin i \cotg J \cos(\Omega - K) &= \varrho' \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + \\ &+ R'' \varrho' \sin(\lambda' - K) \cos(L'' - K) - R' \varrho'' \sin(\lambda'' - K) \cos(L' - K) \end{aligned}$$

Besieht man sich die linken Seiten dieser zwei Gleichungen etwas genauer, so findet man nach einiger Ueberlegung, dass die durch dieselben dargestellten Beträge bei den Kometen in den meisten Fällen sehr klein sein werden; denn erstens sind die von den Kometen beschriebenen Dreiecke wegen der langgestreckten Ellipsen, in denen sie sich bewegen, selbst bei langen Zwischenzeiten immer verhältnissmässig klein, zweitens werden bei Kometen die Neigungen J mitunter sehr gross, da die geocentrischen Breiten oft hoch hinaufgehen, die Neigungen J aber immer grösser sein müssen als die entsprechenden geocentrischen Breiten, wie dies aus 8) in Art. 3 hervorgeht. So erscheint n , welches dem Gesagten zufolge an sich nicht gross ist, mit drei Factoren multipliciert, welche sämmtlich kleiner als die Einheit sind, wodurch die links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke in ihrem Werte sehr heruntergedrückt werden. Falls daher J um vieles grösser wird als 45° , so können die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen oder A und B in Art. 8 für eine erste Näherung der Null gleichgesetzt werden; infolge dessen ergibt sich aus $A = 0$ das Verhältniss:

$$q'' = q' \cdot \frac{R'' \sin(\lambda' - K) \sin(L'' - K)}{R' \sin(\lambda'' - K) \sin(L' - K)} \dots \dots (J)$$

Setzt man diesen Wert von q'' in die Gleichung $B = 0$, so kommt als ein erster Näherungswert für q' zum Vorschein:

$$q' = \frac{R' \sin(\lambda'' - K) \sin(L'' - L')}{\sin(\lambda'' - \lambda') \sin(L'' - K)} \dots \dots \dots (J)$$

Ihrem eigentlichen Wesen nach läuft diese analytische Betrachtung auf die Annahme $n = 0$ hinaus; diese Annahme, obwohl sie falsch ist, wird aber in den linksseitigen Ausdrücken der obigen zwei Gleichungen unterstützt durch die kleinen Factoren, mit denen n multipliciert erscheint, so dass man die rechtsstehenden Ausdrücke desto eher der Null gleichsetzen darf. Würden die erwähnten Factoren oder auch nur einer davon die Einheit übersteigen, so werden die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ von der Wahrheit mehr abweichen, aber noch immer brauchbare Näherungen liefern, wenn dafür die Dreieckflächen recht klein werden, was bei kurzen Zwischenzeiten stets der Fall ist.

Mit den so gewonnenen Näherungen von q' und q'' kann die Rechnung nun beginnen; man bestimme aus der Formel

$$r^2 = R^2 - 2Rq \cos(L - \lambda) + q^2 \sec^2 \beta$$

die beiden Radienvectoren r' und r'' ; die dazu gehörige Sehne s findet sich in Berücksichtigung von II. 6 und III. 7 (gegen Ende) aus der Gleichung:

$$s^2 = r'^2 + r''^2 - 2\sigma$$

Es ist bemerkenswert, dass die drei Seiten des Raumdreieckes aus nur zwei Distanzen mit Hilfe der Beobachtungsdaten berechnet werden können, denn so wird man leicht einsehen, dass die Verhältnisse dieser drei Seiten unter einander durch das einzige Verhältnis, in welchem zwei Distanzen zu einander stehen, definiert werden, und dass zur Bildung eines ähnlichen Dreieckes in der supponierten Parabel weiter nichts nothwendig ist, als an diesem einen Verhältnisse festzuhalten. Man gehe demnach mit den so erhaltenen Werten von r' , r'' , s in die Euler'sche Gleichung

$$(r'_0 + r''_0 + s_0)^{3/2} - (r'_0 + r''_0 - s_0)^{3/2} = 6k(t'' - t')$$

ein und untersuche, ob sie derselben genügen; sollte dies nicht der Fall sein, so ändere man ϱ' ein wenig und bestimme mit Festhaltung des oben gefundenen Verhältnisses $\varrho' : \varrho''$ auch die Distanz ϱ'' , worauf die Rechnung von vorne beginnt; man rechnet wieder r' , r'' , s und untersucht, ob diese Werte der vorstehenden Euler'schen Gleichung genügen; die Versuche werden so lange fortgesetzt, bis diese Gleichung vollkommen befriedigt wird; dabei bleibt, wie gesagt, das Verhältnis zwischen ϱ' und ϱ'' , wie es aus $A = 0$ gefunden wurde, unangetastet denn dasselbe haftet als charakteristisches Merkmal der ganzen ersten Parabelhypothese an.

Die bei der oben beschriebenen Operation schliesslich zum Vorschein kommenden Werte der zwei Distanzen und der drei Dreieckseiten gehören also schon der supponierten Parabel an und müssen der obigen Bezeichnungsweise gemäss mit dem Index $_0$ versehen werden, so dass wir neben r'_0 , r''_0 , s_0 auch ϱ'_0 und ϱ''_0 gefunden haben, wobei $\varrho'_0 : \varrho''_0 = \varrho' : \varrho''$ ist. Wir benöthigen aber, um die Dreieckflächen n_0 , n'_0 , n''_0 rechnen zu können, noch der Grössen r_0 , s'_0 , s''_0 ; zu diesem Ende bestimmen wir auch noch ϱ_0 aus der Gleichung der Ebene, wie wir sie aus 4) in III. 2 kennen; denn wie wenig der Wahrheit entsprechend auch ϱ_0 , ϱ'_0 , ϱ''_0 in dieser ersten Parabelhypothese sein mögen, die Gleichung der Ebene müssen sie befriedigen, weil sonst die Parabeldreiecke selbst nicht in ein und derselben Ebene zu liegen kämen. Die erwähnte Gleichung der Ebene lässt sich aber in eine noch gefälligere und für die Rechnung bequemere

Form kleiden. Man bringe nämlich mit Hilfe der Gleichungen 8) in Art. 3 sämtliche in 4) Art. 2 vorkommenden Tangenten der geocentrischen Breiten auf Ausdrücke, welche beispielsweise $tg J$ enthalten, so dass zuletzt $tg J$ schwindet. Nach gehöriger Vereinfachung und mit Berücksichtigung von 11) in Art. 3 wird dann

$$\varrho\varrho'\varrho'' - \varrho'\varrho''Rq\sin(L-K) + \varrho\varrho''R'q'\sin(L'-K') - \varrho\varrho'R''q''\sin(L''-K'') - \\ - \varrho Nq'q''\sin(K''-K') + \varrho'N'qq''\sin(K''-K) - \varrho''N''qq'\sin(K'-K) = 0$$

Denken wir uns hier die Distanzen mit dem Index $_0$ versehen und die Werte von ϱ'_0 und ϱ''_0 eingesetzt, so haben wir eine Gleichung ersten Grades, aus der sich ϱ_0 mit unzweifelhafter Gewissheit finden lässt. Ist ϱ_0 berechnet, so ergibt sich r_0 aus der obigen Formel; weiters ist

$$s_0'^2 = r_0^2 + r_0''^2 - 2\sigma_0', \quad s_0''^2 = r_0^2 + r_0'^2 - 2\sigma_0''$$

wo der Index $_0$ bei σ' und σ'' sagen will, dass man diese beiden Grössen mit den Distanzen ϱ_0 , ϱ'_0 , ϱ''_0 zu rechnen hat. So sind alle Seiten der drei Parabeldreiecke bekannt geworden.

Wollten wir auf eine Controle der Beobachtungen selbst verzichten, so könnten wir die Berechnung von r_0 , s_0' , s_0'' ganz umgehen; mit Hilfe der gefundenen Grössen ϱ_0 , ϱ'_0 , ϱ''_0 könnten wir sofort die Projectionen ν , ν' , ν'' rechnen und mit den so gewonnenen Dreieckverhältnissen den Uebergang auf die Ellipse bewerkstelligen, indem wir ϱ , ϱ' , ϱ'' aus 13) Art. 3 bestimmen, wie wir es ähnlich in der Kreishypothese gethan haben. Dieser Weg wäre hier der kürzeste und lohnendste; allein weil es uns nicht gleichgiltig sein kann, zu erfahren, mit einem wie beschaffenen Material wir arbeiten, so dürfen wir die grössere Mühe, welche die Berechnung von n_0 , n'_0 , n''_0 verursacht, nicht scheuen. Es müssen aber die Dreieckverhältnisse nach beiden Seiten hin unter einander stimmen, wenn das Beobachtungsmaterial gut genannt werden soll.

Sollte unter den drei Neigungen J , J' , J'' nicht J sondern J' am grössten sein, so werden A' und B' in Art. 8 der Null zunächst stehen, und es wird gerathener sein, das Verhältniss $\varrho : \varrho''$ der ersten Parabelhypothese zugrunde zu legen; setzt man nämlich $A' = 0$, so kommt

$$\varrho'' = \varrho \cdot \frac{R''\sin(\lambda - K')\sin(L'' - K')}{R\sin(\lambda'' - K')\sin(L - K')} \dots \dots \dots (J')$$

Substituiert man diesen Wert von ϱ'' in die Gleichung $B' = 0$, so erhält man als ersten Näherungswert:

$$\varrho = \frac{R \sin(\lambda'' - K') \sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L'' - K')} \cdot \dots \cdot (J')$$

Sollte aber $\operatorname{tg} J''$ am höchsten hinaufgehen, so wird man $A'' = 0$, $B'' = 0$ setzen und nach dieser Seite hin die erste Parabelhypothese bilden; es wird dann

$$\varrho' = \varrho \cdot \frac{R' \sin(\lambda - K'') \sin(L' - K'')}{R \sin(\lambda' - K'') \sin(L - K'')} \cdot \dots \cdot (J'')$$

$$\text{und } \varrho = \frac{R \sin(\lambda' - K'') \sin(L' - L)}{\sin(\lambda' - \lambda) \sin(L' - K'')}$$

Das weitere Verfahren ist dem obigen ganz analog und bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung; es wird sich aber häufig ereignen, dass zwei der Neigungen J, J', J'' , wenn auch nicht gleich, so doch beide ziemlich gross sind; für die Bildung der Parabelhypothese wird man natürlich immer der grösseren den Vorzug geben; es wird aber von Interesse sein, zu erfahren, wie gross die eine Distanz, welche in beiden Näherungen vorkommt, nach der zweiten Seite hin ausfällt. Würde der Himmelskörper geradlinig auf die Sonne zu sich bewegen, um sich schliesslich in dieselbe zu stürzen, so würden gar keine Dreiecke zustande kommen, in diesem Falle wäre $n = n' = n'' = 0$ oder mit einem anderen Worte, der Himmelskörper besässe keine heliocentrische Bewegung. Da wären also sämtliche A und B gleich der Null und es müssten für eben dieselbe Distanz durch die Auflösung dieser Gleichungen zwei ganz gleiche Werte zum Vorschein kommen. Geben umgekehrt zwei in obiger Weise berechnete Näherungen für ebendieselbe Distanz zwei verschiedene Werte, so kann man daraus schon schliessen, dass der Himmelskörper eine heliocentrische Bewegung besitzt.

Nachdem wir die Seiten der drei Parabeldreiecke kennen, ist die Berechnung der Flächen n_0, n_0', n_0'' keiner weiteren Schwierigkeit unterworfen, denn aus den drei Seiten lässt sich einem planimetrischen Satze zufolge die Fläche eines Dreieckes leicht berechnen; die Verhältnisse in der Parabel gestatten aber noch eine Vereinfachung. Allgemein ist z. B.

$$n'' = rr' \sin(v' - v) = 2rr' \sin \frac{1}{2}(v' - v) \cos \frac{1}{2}(v' - v)$$

da nun

$$s''^2 = (r + r')^2 - 4rr' \cos^2 \frac{1}{2}(v' - v)$$

so wird, wenn man mit Gauss $\frac{s''}{r+r'} = \sin \gamma''$ setzt,

$$2\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v) = (r + r') \cos \gamma'' \dots \dots \delta)$$

In der Parabel ist aber, da $e = 1$ wird, mit Weglassung des Index $_0$

$$p = 2r \cos^2 \frac{v}{2} = 2r' \cos^2 \frac{v'}{2} = 2\sqrt{rr'} \cos \frac{v}{2} \cos \frac{v'}{2} \dots \dots \varepsilon)$$

Demnach ist auch

$$\sqrt{r'} \cos \frac{v'}{2} - \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = 0$$

oder wenn man quadriert

$$r' \cos^2 \frac{v'}{2} - 2\sqrt{rr'} \cos \frac{v}{2} \cos \frac{v'}{2} + r \cos^2 \frac{v}{2} = 0$$

identisch ist:

$$r' \sin^2 \frac{v'}{2} - 2\sqrt{rr'} \sin \frac{v}{2} \sin \frac{v'}{2} + r \sin^2 \frac{v}{2} = \left(\sqrt{r'} \sin \frac{v'}{2} - \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} \right)^2$$

Werden diese beiden Gleichungen addiert, so kommt

$$\sqrt{r'} \sin \frac{v'}{2} - \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v)}$$

oder in Rücksicht auf $\delta)$ und $\varepsilon)$, da

$$\sqrt{r} = \sqrt{\frac{1}{2}p} \cos \frac{v}{2}, \quad \sqrt{r'} = \sqrt{\frac{1}{2}p} \cos \frac{v'}{2} \text{ ist,}$$

$$\sqrt{p} \left(\operatorname{tg} \frac{v'}{2} - \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) = \sqrt{2(r + r')(1 - \cos \gamma'')}$$

oder auch

$$\frac{\sqrt{p} \sin \frac{1}{2}(v' - v)}{\cos \frac{v'}{2} \cos \frac{v}{2}} = 2 \sin \frac{\gamma''}{2} \sqrt{r + r'}$$

Da zufolge $\varepsilon)$ $\cos \frac{v'}{2} \cos \frac{v}{2} = \frac{p}{2\sqrt{rr'}}$ ist, so ergibt sich

$$\sqrt{rr'} \sin \frac{1}{2}(v' - v) = \sin \frac{\gamma''}{2} \sqrt{p(r + r')} \dots \dots \zeta)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\delta)$, so erhält man

$$n_0'' = rr' \sin(v' - v) = \sqrt{p}(r + r')^{3/2} \cos \gamma'' \sin \frac{\gamma''}{2}$$

Setzt man dann analog

$$\frac{s'}{r+r''} = \sin \gamma', \quad \frac{s}{r'+r''} = \sin \gamma$$

so wird

$$n_0' = \sqrt{p}(r+r'')^{3/2} \cos \gamma' \sin \frac{\gamma'}{2}, \quad n_0 = \sqrt{p}(r+r'')^{3/2} \cos \gamma \sin \frac{\gamma}{2}$$

wobei, da wir es mit Parabeldreiecken zu thun haben, alle Seiten derselben mit dem Index $_0$ zu versehen wären. Darnach lässt sich jetzt $n : n' : n'' = n_0 : n_0' : n_0''$ leicht bestimmen; $\sqrt{p}$ fällt als gemeinschaftlicher Factor hier weg. Es lassen sich aber diese Dreiecke auch theilweise als Functionen der Zwischenzeiten darstellen. Wir hatten oben 13) in II. 8 für die Parabel gefunden:

$$tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2} = \frac{2kt}{p^{3/2}}$$

Die Masse wird bei Kometen vernachlässigt, daher $\sqrt{1+m}$ im Zähler rechts weggelassen wurde; analog ist für einen zweiten Ort

$$tg \frac{v'}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v'}{2} = \frac{2kt'}{p^{3/2}}$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorangehende ab, so ist

$$tg \frac{v'}{2} - tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \left(tg^3 \frac{v'}{2} - tg^3 \frac{v}{2} \right) = \frac{2k}{p^{3/2}} (t' - t)$$

oder mittelst Factorenzerlegung

$$\left(tg \frac{v'}{2} - tg \frac{v}{2} \right) \left(3 + tg^2 \frac{v'}{2} + tg \frac{v'}{2} tg \frac{v}{2} + tg^2 \frac{v}{2} \right) = \frac{6k(t' - t)}{p^{3/2}}$$

Es ist aber

$$tg \frac{v'}{2} - tg \frac{v}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(v' - v)}{\cos \frac{v'}{2} \cos \frac{v}{2}} = \frac{2\sqrt{rr'} \sin \frac{1}{2}(v' - v)}{p}$$

$$1 + tg^2 \frac{v'}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{v'}{2}} = \frac{2r'}{p}, \quad 1 + tg^2 \frac{v}{2} = \frac{2r}{p}$$

$$1 + tg \frac{v'}{2} tg \frac{v}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(v' - v)}{\cos \frac{v'}{2} \cos \frac{v}{2}} = \frac{2\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v)}{p}$$

Setzt man dies oben ein, so wird

$$2\sqrt{rr'} \sin \frac{1}{2}(v' - v) [r + r' + \sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v)] = 3k(t' - t) \sqrt{p}$$

Wenn man den linken Theil mit $\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v)$ multipliciert und dividirt, so kommt

$$n_0'' \left[\frac{r + r'}{\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v' - v)} + 1 \right] = 3k(t' - t) \sqrt{p}$$

oder in Rücksicht auf δ) oben

$$n_0'' \left(\frac{2}{\cos \gamma''} + 1 \right) = 3k(t' - t) \sqrt{p}$$

daraus folgt

$$n_0'' = 3k(t' - t) \sqrt{p} \cdot \frac{\cos \gamma''}{2 + \cos \gamma''}$$

Demgemäss nehmen die Dreieckverhältnisse auch folgende Gestalt an:

$$n : n' : n'' = \frac{\tau \cos \gamma}{2 + \cos \gamma} : \frac{\tau' \cos \gamma'}{2 + \cos \gamma'} : \frac{\tau'' \cos \gamma''}{2 + \cos \gamma''}$$

wenn man wie früher $t'' - t' = \tau$, $t'' - t = \tau'$, $t' - t = \tau''$ setzt. Aus dieser zweifachen Entwicklung lässt sich aber auch eine zweite Controle für die Uebereinstimmung der Zwischenzeiten mit dem übrigen Beobachtungsmaterial finden; es ist

$$n_0'' = \sqrt{p} (r + r')^{3/2} \cos \gamma'' \sin \frac{\gamma''}{2} = 3k(t' - t) \sqrt{p} \cdot \frac{\cos \gamma''}{2 + \cos \gamma''}$$

Daraus folgt jetzt

$$(r + r')^{3/2} \sin \frac{\gamma''}{2} = \frac{3k(t' - t)}{2 + \cos \gamma''}$$

Diese und die zwei noch übrigen analog gebauten Gleichungen, die sich der Leser selbst formen mag, benütze man zur Controle. Es ist selbstverständlich, dass eine dieser drei Gleichungen stets vollkommen befriedigt werden wird, nämlich diejenige, in der die Zwischenzeit vorkommt, welche auch in der verwendeten Euler'schen Gleichung auftritt; denn da die ganze Parabelhypothese nach dieser Seite hin aufgebaut wurde, so muss diese Uebereinstimmung sich zeigen, ausser es wäre ein Rechnungsfehler unterlaufen, so dass diese Gleichung nur eine Rechnungsprobe liefert. Hingegen werden die zwei übrigen

Gleichungen die Uebereinstimmung des ausgewählten Rechnungsmaterials auf die Probe stellen; in den meisten Fällen werden grössere oder kleinere Ungleichheiten zustande kommen, die man bei der endgiltigen Feststellung der Dreieckverhältnisse wird irgendwie glätten müssen.

Diese drei Gleichungen sind aber nichts anderes als Umformungen der entsprechenden drei Euler'schen Formeln, wie sich dies leicht beweisen lässt. Man setze in der Gleichung

$$(r + r' + s'')^{3/2} - (r + r' - s'')^{3/2} = 6k(t' - t)$$

$$s'' = (r + r') \sin \gamma''$$

wie oben; dann kommt nach einer kurzen Operation

$$(r + r')^{3/2} [(1 + \sin \gamma'')^{3/2} - (1 - \sin \gamma'')^{3/2}] = 6k(t' - t)$$

Es ist aber identisch

$$1 \pm \sin \gamma = \left(\cos \frac{\gamma}{2} \pm \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2$$

wie man sich leicht durch Ausführung der angezeigten Operation überzeugen kann.

Mit Benützung dieser Formel wird dann

$$(r + r')^{3/2} \left[\left(\cos \frac{\gamma''}{2} + \sin \frac{\gamma''}{2} \right)^3 - \left(\cos \frac{\gamma''}{2} - \sin \frac{\gamma''}{2} \right)^3 \right] = 6k(t' - t)$$

Erhebt man die zwei Ausdrücke innerhalb der eckigen Klammern wirklich auf den Cubus und reduciert, so kommt

$$(r + r')^{3/2} \left(\sin^3 \frac{\gamma''}{2} + 3 \cos^2 \frac{\gamma''}{2} \sin \frac{\gamma''}{2} \right) = 3k(t' - t)$$

oder

$$(r + r')^{3/2} \cdot \sin \frac{\gamma''}{2} \left(\sin^2 \frac{\gamma''}{2} + 3 \cos^2 \frac{\gamma''}{2} \right) = 3k(t' - t)$$

Da aber $\sin^2 \frac{\gamma}{2} + 3 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 + \cos \gamma$ ist, so haben wir schliesslich

$$(r + r')^{3/2} \cdot \sin \frac{\gamma''}{2} (2 + \cos \gamma'') = 3k(t' - t)$$

ganz übereinstimmend mit der früheren Gleichung. Damit ist erstens bewiesen, dass die Euler'sche Formel wirklich die Gleichung einer Parabel ist, zweitens ersieht man daraus, dass es gleichgiltig ist, ob man die erwähnten zwei Gleichungen oder die betreffenden Euler'schen Formeln selbst als Controle benützen will.

Mit diesen ersten Näherungen für $n : n' : n''$, ob sie nun nach der einen oder der anderen Seite hin gebildet worden sind, gehe man jetzt in 13) Art. 3 ein und berechne daraus die Distanzen q, q', q'' , welche, wenn auch noch so fehlerhaft, doch schon um vieles richtiger sind, als die zuerst angenommenen. Damit ist der Uebergang auf die Ellipse, wenn wirklich eine solche zustande kommen soll, bewerkstelligt. Um sich zu überzeugen, dass die Ausdrücke für q, q', q'' in 13) Art. 3 richtig berechnet und auch q, q', q'' richtig bestimmt sind, gehe man mit den zum Vorschein gekommenen Distanzen in die dritte Grundgleichung

$$nq \operatorname{tg} \beta - n'q' \operatorname{tg} \beta' + n''q'' \operatorname{tg} \beta'' = 0$$

welche als die Gleichung einer Ebene befriedigt werden muss. Enthalten in 13) Art. 3 die die einzelnen Glieder bildenden Decimalzahlen nur eine ganze Stelle, so wird die Probe eine Uebereinstimmung bis auf die sechste Decimalstelle hinauf aufweisen; kommen dort auch Zehner vor, so geht diese Uebereinstimmung kaum über die fünfte Decimale hinaus.

Hiemit ist die erste Hypothese zu Ende geführt und man schreite sofort an die Bildung der zweiten Parabelhypothese, welcher man jetzt am schicklichsten das soeben gewonnene Verhältniss $q : q''$ zugrunde legen wird. Das Verfahren ist dem früheren ganz analog und bedarf wohl keiner weiteren Erklärung. Um sich das mühsame und sehr eintönige Geschäft der ganzen Berechnung in etwas abzukürzen, bringe man bei den Versuchen, welche die Euler'sche Gleichung erfordert, beispielsweise r^2, r''^2, σ' auf die Form

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + Aq + Bq^2 \\ r''^2 &= R''^2 + Cq + Dq^2 \\ \sigma' &= RR'' \cos(L'' - L) + Eq + Fq^2 \end{aligned}$$

indem man bei Beginn einer jeden Hypothese die Coëfficienten C, D, E, F aus dem zugrunde gelegten Verhältnisse $q'' = Mq$ neu bestimmt; weiters trachte man die Anzahl der Parabelhypothesen dadurch zu vermindern, dass man nach der dritten Hypothese, wo

die Bewegung des Verhältnisses $q : q''$ schon etwas genauer erforscht ist, dafür geeignete Interpolationen macht. Das Verfahren wird aber so lange fortgesetzt werden müssen, bis das Verhältnis $q : q''$ und mit demselben die Dreieckverhältnisse sich nicht mehr ändern.

11.

Sind zuletzt die Werte von q , q' , q'' so genau als möglich ermittelt, so gehe man an die Berechnung der Bahnelemente. Der Weg, den wir hier einschlagen, ist aber etwas verschieden von dem bei den Planeten in Art. 8 befolgten. Vor allen ist zu bemerken, dass die Ausdrücke für $tg(\Omega - K)$ und $tg i$, wie sie dort stehen, hier nicht gut verwendet werden können, weil die verschiedenen Werte von A und B bei den Kometen sehr klein ausfallen, auf welchen Umstand wir schon oben hingewiesen und uns denselben in anderer Weise zu Nutzen gemacht haben. Wir wählen daher den bisher ohne Unterschied gebrauchten Weg, nämlich den vermitteltst Ueberganges auf die heliocentrischen Polarcoordinaten, weil er hier mehr Sicherheit gewährt.

Für die Verwandlung der geocentrischen Längen in heliocentrische hat man aus 4) und 6) in I. 2 die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} tg(\lambda - l) &= \frac{R \sin(L - \lambda)}{q - R \cos(L - \lambda)} \\ tg(180^\circ - L + l) &= \frac{q \sin(L - \lambda)}{R - q \cos(L - \lambda)} \end{aligned} \right\} \dots\dots 1)$$

die erste davon wird man wählen, wenn $q > R$ ist, sonst die zweite. Behufs bequemer Rechnung dividiere man früher Zähler und Nenner mit q , R ; in Bezug auf den zu wählenden Quadranten beachte man die gegebene Regel, dass der Sinus des gesuchten Winkels das Zeichen des Zählers, der Cosinus das des Nenners erhält. Um den Einfluss der Fehler in q , λ auf l anschaulich zu machen, differenzieren wir einerseits nach l , andererseits nach q und λ ; mit Benützung von 3) in I. 2 erhalten wir aus beiden Formeln übereinstimmend

$$dl = \frac{\sin(\lambda - l) dq + q \cos(\lambda - l) d\lambda}{r \cos b} \dots\dots \text{für 1)}$$

Daraus ist im allgemeinen ersichtlich, dass bei grosser Sonnen-nähe des Kometen diese Fehler ziemlich stark einwirken werden, weshalb derartige Beobachtungen nicht zu den für die Bahnbestimmung günstigsten gezählt werden dürfen.

Für die Verwandlung der geocentrischen Breiten in heliocentrische hat man aus 7) in I. 2

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin(L-l)}{\sin(L-\lambda)} \operatorname{tg} \beta \dots\dots\dots 2)$$

Die Differentiation ergibt zunächst

$$db = \sin 2b \left[\frac{d\lambda}{2 \operatorname{tg}(L-\lambda)} + \frac{d\beta}{\sin 2\beta} - \frac{dl}{2 \operatorname{tg}(L-l)} \right]$$

Substituiert man hier für dl den oben gefundenen Wert, so kommt nach gehöriger Reduction und mit Berücksichtigung von 3) in I. 2

$$db = -\frac{R \sin b \cos(L-l)}{r \varrho} d\varrho + \frac{R \sin b \sin(L-l)}{r} d\lambda + \frac{\sin 2b}{\sin 2\beta} d\beta$$

Man sieht, dass, ausser bei grosser Sonnennähe des Kometen, Fehler in ϱ und λ im allgemeinen vermindert auf b übergehen, hingegen wenn $b > \beta$ ist, die Fehler in den geocentrischen Breiten vergrössert werden, was öfters vorkommen mag. Zur Controle der bisherigen Rechnung benütze man die Gleichung 3) in III. 2

$$\operatorname{tg} b \sin(l''-l') - \operatorname{tg} b' \sin(l''-l) + \operatorname{tg} b'' \sin(l'-l) = 0$$

Für die Verwandlung der geocentrischen Distanzen in heliocentrische kann bei Kometen mit Vorthail verwendet werden die Formel

$$r = \frac{\varrho \operatorname{tg} \beta}{\sin b} \dots\dots\dots 3)$$

wie am Schlusse von I. 2 bemerkt worden ist.

Nach Bewerkstelligung dieses Ueberganges gehen wir an die Berechnung von Ω und i ; aus 2) in I. 1 folgt

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega) \dots\dots\dots 4)$$

Solcher Gleichungen haben wir hier, entsprechend den drei Beobachtungen, drei; behandelt man dieselben analog wie die in 8) Art. 3, so erhält man für die Bestimmung von Ω folgende sechs Ausdrücke;

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(l - \Omega) &= \frac{\operatorname{tg} b \sin(l' - l)}{\operatorname{tg} b' - \operatorname{tg} b \cos(l' - l)} = \frac{\operatorname{tg} b \sin(l'' - l)}{\operatorname{tg} b'' - \operatorname{tg} b \cos(l'' - l)} \\ \operatorname{tg}(l' - \Omega) &= \frac{\operatorname{tg} b' \sin(l - l')}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b' \cos(l - l')} = \frac{\operatorname{tg} b' \sin(l'' - l')}{\operatorname{tg} b'' - \operatorname{tg} b' \cos(l'' - l')} \\ \operatorname{tg}(l'' - \Omega) &= \frac{\operatorname{tg} b'' \sin(l - l'')}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b'' \cos(l - l'')} = \frac{\operatorname{tg} b'' \sin(l' - l'')}{\operatorname{tg} b' - \operatorname{tg} b'' \cos(l' - l'')} \end{aligned} \right\} \dots\dots 5)$$

Behufs bequemer Rechnung dividiere man überall Zähler und Nenner durch die im Nenner einzeln stehende Tangente, so dass man auch hier auf die uns beliebte Form kommt. Von den sechs Formeln sind aus bekannten Gründen immer diejenigen auszuwählen, wo der Quotient der Tangenten ein echter Bruch ist. Hat man Ω berechnet, so findet sich i aus einer der Gleichungen 4).

Aus 2) in I. 1 ergibt sich weiter für das Argument der Breite die Formel

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}(l - \Omega)}{\cos i} \dots\dots\dots 6)$$

woraus man u , u' , u'' und aus den Unterschieden derselben $v'' - v'$, $v'' - v$, $v' - v$ rechnet; um sich vor Irrungen zu bewahren, achte man wohl auf die Vorzeichen von $\sin u$ und $\cos u$, wie sich dieselben aus 2) in I. 1 ergeben. Der Controle wegen kann man auch die Projectionen v , v' , v'' und mit Zuhilfenahme derselben die Raumdreiecke

$$n = \frac{v}{\cos i}, \quad n' = \frac{v'}{\cos i}, \quad n'' = \frac{v''}{\cos i} \dots\dots\dots 7)$$

rechnen und sie vergleichen mit den aus $n = r'r'' \sin(v'' - v')$, $n' = rr'' \sin(v'' - v)$, $n'' = rr' \sin(v' - v)$ berechneten Werten.

Die noch übrigen Elemente p , e , a , M , π bestimmt man jetzt ganz so wie bei den Planeten; hiemit aber haben wir die stillschweigende Annahme gemacht, dass das verwendete Beobachtungsmaterial so günstig war, dass wirklich eine Ellipse zum Vorschein kommt; allein dies wird selten stattfinden, gewöhnlich werden die aus der letzten Parabelhypothese hervorgegangenen Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' , die wir aus 13) Art. 3 berechnet haben, beinahe um nichts verschieden sein von den Distanzen ϱ_0 , ϱ_0' , ϱ_0'' , die die Euler'sche Formel geliefert hat, es wird $\beta = 1$ und $r = r_0$, $r' = r_0'$ u. s. w., mit anderen Worten, die Beobachtungen der Kometen werden meistens auf eine Parabel führen. Den Grund dieser für den ersten Augenblick sehr auffallenden Erscheinung haben wir schon oben angedeutet. Weil nämlich zur Zeit der Sichtbarkeit der Kometen die Radienvectoren r sehr klein werden, so verschwinden in der Reihe 7) des vorigen Artikels die Glieder, welche a enthalten, fast ganz und es bleibt nur noch die Euler'sche Gleichung übrig, als ob die Bahn wirklich eine Parabel wäre; je langgestreckter die Ellipse ist, in der sich der Komet bewegt, desto eher wird dies stattfinden, d. h. desto eher wird der das Perihel umspannende Theil der Ellipse einer Parabel

gleichkommen. Weil aber dennoch q , q' , q'' in den letzten Decimalen um einiges von q_0 , q_0' , q_0'' verschieden sind, welche Abweichung übrigens auch von Beobachtungsfehlern herrühren mag, so wird man Parameter, Excentricität und die wahren Anomalien ganz so wie bei den Planeten rechnen, schon deswegen, um sich zu überzeugen, ob in der That $e = 1$ wird. Zieht man aber das etwas kürzere Verfahren für die Parabel vor, so wird vermöge der schon oben benützten Gleichung für die Parabel

$$p = 2r \cos^2 \frac{v}{2} = 2r' \cos^2 \frac{v'}{2} = 2 \sqrt{rr'} \cos \frac{v}{2} \cos \frac{v'}{2} \dots 8)$$

$$\text{vor allen} \quad \sqrt{r'} : \sqrt{r} = \cos \frac{v}{2} : \cos \frac{v'}{2}$$

woraus man auf leichte Weise erhält:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(v' + v) = \frac{\sqrt{r'} - \sqrt{r}}{\sqrt{r'} + \sqrt{r}} \operatorname{cotg} \frac{1}{4}(v' - v) \dots 9)$$

Aus der vorstehenden Formel findet man v , v' und aus der früheren p . Die Zeit T_0 , wann der Komet in der Sonnennähe gewesen ist, die man einfach Perihelzeit nennt, bestimmt man aus der Gleichung

$$\frac{2kt}{p^{3/2}} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \dots 10)$$

Ist der Komet rechtläufig, d. h. ist $i < 90^\circ$ und nehmen die Anomalien zu, so wird, wenn T_0 die Perihelzeit und T irgend ein Datum der Beobachtung bedeutet, an welchem die wahre Anomalie v beträgt,

$$t = T - T_0, \quad \text{daher} \quad T_0 = T - t \dots 11\alpha)$$

Ist hingegen der Komet rückläufig, d. h. ist $i > 90^\circ$ und nehmen die Anomalien ab, so wird

$$t = T_0 - T, \quad \text{daher} \quad T_0 = T + t \dots 11\beta)$$

t bedeutet bekanntlich die seit der Perihelzeit verflossenen Tage und hat mit $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ gleiches Vorzeichen, d. h. diese beiden Grössen sind bei rechtläufigen Kometen vor der Perihelzeit negativ, nach derselben positiv; umgekehrt ist es bei rückläufigen Kometen: vor der Perihelzeit sind $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ und t positiv, nach derselben negativ. Die Länge des Perihels findet man aus der Gleichung

$$u = \pi + v - \Omega \dots 12)$$

Hat man bei zwei für verschieden gehaltenen Kometen, in deren Erscheinung eine gewisse Zwischenzeit fällt, durch eine derartige Berechnung der parabolischen Elemente herausgefunden, dass Ω , i , p und π bei beiden übereinstimmen, so kann man mit Recht schliessen, dass dies nur ein einziger Komet ist, dessen Umlaufszeit der Unterschied der beiden gefundenen Perihelzeiten oder ein aliquoter Theil dieses Unterschiedes ist. Durch eine sorgfältige Untersuchung und Vergleichung mit den übrigen in derselben Zwischenzeit erschienenen Kometen wird sich die Umlaufszeit eines solchen Kometen bestimmen lassen. Ist aber einmal die Umlaufszeit eines Kometen bekannt geworden, so beträgt die mittlere tägliche Bewegung

$$\mu = \frac{360^\circ}{U}$$

wo U , die Umlaufszeit, in Tagen auszudrücken ist, und die grosse Halbachse der Ellipse, in welcher sich der Komet bewegt,

$$a = \left(\frac{k}{\mu} \right)^{2/3}$$

wobei k und μ beide entweder in Secunden oder Bogen ausdrücken sind.

Schliesslich hat man die Excentricität der Ellipse

$$\sin \varphi = e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

Hiemit sind alle Elemente der wahren Kometenbahn bestimmt. Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass aus einer einzigen Erscheinung die Ellipse eines Kometen sich gewöhnlich nicht festsetzen lässt, wohl aber aus zweien oder mehreren Erscheinungen, dass aber jedesmal eine womöglich genaue Berechnung der parabolischen Elemente nothwendig ist. Jetzt kann man auch ermessen, wie weit die bisherigen Methoden für die Bestimmung der Kometenbahnen berechtigt und genau waren.

Im Anschlusse an die dargelegte Methode sollte jetzt ein Beispiel folgen; wir hatten ein solches auch berechnet, und zwar das für den Kometen I des Jahres 1847; die von Hornstein in Prag herrührenden Beobachtungen desselben entlehnten wir aus Oppolzers Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Theil pag. 489; von den dort mitgetheilten sieben Beobachtungen hatten wir I, III, VI ausgewählt; allein als wir nach Bildung der ersten Parabelhypothese die Dreieckverhältnisse

$\nu : \nu' : \nu''$ einerseits und $n_0 : n_0' : n_0''$ andererseits berechneten, zeigte sich eine so bedeutende Verschiedenheit, dass wir Bedenken trugen, die ganze Berechnung hieher zu setzen, weil wir die Beobachtungen für fehlerhaft hielten; allein bei näherer Betrachtung erwiesen sich jene Unterschiede als in der Natur der Sache gegründet. Es geben nämlich die aus den Distanzen $\varrho_0, \varrho_0', \varrho_0''$ in erster Hypothese berechneten Projectionen ν, ν', ν'' wohl ebendieselben Dreieckverhältnisse, welche man erhält, wenn man aus $r_0, r_0', r_0'', s_0, s_0', s_0''$ die betreffenden drei Dreiecke auf gewöhnlichem Wege rechnet, dieselben entsprechen aber schon nicht mehr den Dreieckverhältnissen $n_0 : n_0' : n_0''$, die man vermittelt einer Parabelhypothese auf die oben angegebene Weise daraus gebildet, aus dem einfachen Grunde, weil diese letzteren Dreieckverhältnisse der zweiten Hypothese angehören, die ersteren hingegen, in 13) Art. 3 eingeführt, das der ersten Hypothese zugrunde gelegte Verhältnis $\varrho : \varrho''$ liefern, also die Dreieckverhältnisse sind, mit denen die ganze Berechnung hätte eingeleitet werden können, wenn sie von irgendwoher bekannt gewesen wären. Daraus geht erstens hervor, dass die Parabelhypothese nur auf eine einzige Art gebildet werden kann, während für die Kreishypothese zwei Wege offen stehen, wie wir dies oben gesehen haben, zweitens dass eine Controle der Beobachtungen hier insofern möglich ist, dass die aus $\varrho_0, \varrho_0', \varrho_0''$ berechneten Projectionen die der betreffenden Parabelhypothese zugrunde gelegten Dreieckverhältnisse wiedergeben müssen.

Wir lassen nun das Beispiel folgen.

12.

Beispiel: Komet I. 1847.

Mittl. Berl. Zeit	λ	β	L	$lg R$
I. 1847, Febr. 18.0	26° 21' 16.43''	+ 62° 44' 5.18''	329° 13' 31.05''	9.9951324
II. » » 26.0	22 49 8.25	+ 54 29 31.07	337 16 24.50	9.9959194
III. » März 4.0	20 59 23.75	+ 47 35 53.42	343 17 13.98	9.9965726
IV. » » 10.0	19 20 22.28	+ 39 53 7.72	349 17 0.68	9.9972759
V. » » 16.0	17 27 10.54	+ 30 58 26.60	355 15 45.52	9.9980025
VI. » » 20.0	15 47 38.06	+ 24 1 38.24	359 14 16.82	9.9984879
VII. » April 24.0	44 18 54.19	+ 16 35 5.41	33 37 41.36	0.0027526

Von diesen sieben Beobachtungen, die wir wegen später anzustellender Proben alle hergesetzt haben, wählen wir für die Bahnbestimmung die I., III. und VI.

Die Berechnung der Knotenlängen K, K', K'' aus 9) Art. 3 ergab:

$$K = 12^\circ 14' 44.47'', \quad K' = 12^\circ 40' 49.67'', \quad K'' = 14^\circ 7' 20.64''$$

$$\lg \operatorname{tg} J = 0.8575293, \quad \lg \operatorname{tg} J' = 0.9142352, \quad \lg \operatorname{tg} J'' = 0.9618042$$

Aus 11) Art. 3 erhält man

$$\lg q = 1.5916570_n \quad \lg q' = 1.9545162_n \quad \lg q'' = 1.7097614_n$$

Sonach wird aus 13) Art. 3

$$q = 26.3474365 - \frac{n'}{n}[1.2732325] + \frac{n''}{n}[0.9424850]$$

$$q' = \frac{n}{n'}[1.7871024] - 43.852495 + \frac{n''}{n'}[1.3193686]$$

$$q'' = \frac{n}{n''}[1.5535975] - \frac{n'}{n''}[1.4160874] + 13.120852$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Weil die einzelnen Decimalzahlen zu zwei ganze Stellen enthalten, so können wir in den Logarithmen der Distanzen nur auf fünf sichere Decimalen zählen. Weiters gibt die Formel

$$r^2 = R^2 - 2Rq \cos(L - \lambda) + q^2 \sec^2 \beta$$

$$r^2 = 0.9778332 - q[0.0307586] + q^2[0.6780602]$$

$$r'^2 = 0.9843402 - q'[0.1958859] + q'^2[0.3422602]$$

$$r''^2 = 0.9930607 - q''[0.2811291] + q''^2[0.0787240]$$

Für die Berechnung der Sehnen s, s', s'' benöthiget man $\sigma, \sigma', \sigma''$; die Formeln am Schlusse des Art. 7 geben

$$\sigma = q'q''[0.1714550] - q'[9.9664088] - q''[9.9225695] + 0.95062535$$

$$\sigma' = qq''[0.2667182] - q[9.9479175] - q''[9.8323959] + 0.8532873$$

$$\sigma'' = qq'[0.4942160] - q[9.8602235] - q'[9.7867482] + 0.951682$$

Für die Projectionen ν, ν', ν'' erhält man

$$\nu = 0.27170375 + q'[9.5673800] - q''[9.7268687] - q'q''[8.9569531]$$

$$\nu' = 0.49289818 + q[9.6572645] - q''[9.8561875] - qq''[9.2631065]$$

$$\nu'' = 0.23837374 + q[9.8309027] - q'[9.8902648] - qq'[8.9707827]$$

Zuletzt bekommt man als Gleichung der Ebene aus Art. 10

$$pp'p'' - p'p''[1.4207384] + pp''[1.6419943] - pp'[1.1179620] - p[1.4991508] +$$

$$+ p'[1.5093734] - p''[0.8035721] = 0$$

Somit sind die Vorbereitungsrechnungen erledigt und wir versuchen behufs Bestimmung der Dreieckflächen n_0, n_0', n_0'' die Bildung der ersten Parabelhypothese.

Unter den Tangenten der drei Neigungen J, J', J'' ist, wie wir sehen, $tg J''$ am grössten, daher das Verhältnis $\varrho : \varrho'$ aus der Gleichung (J'') im Art. 10 die relativ beste Näherung liefern wird. Es ist nämlich:

$$\begin{array}{rcl}
 lg R' & = & 9.9965726 \\
 lg \sin(\lambda - K'') & = & 9.3260765 \\
 lg \sin(L' - K'') & = & 9.7097534_n \\
 \hline
 & & 9.0324025_n \\
 & & 9.0324025_n \\
 & & 8.9214736_n \\
 \hline
 & & 0.1109289
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 lg R & = & 9.9951324 \\
 lg \sin(\lambda' - K'') & = & 9.0776375 \\
 lg \sin(L - K'') & = & 9.8487037_n \\
 \hline
 & & 8.9214736_n
 \end{array}$$

Als Grundlage für die erste Hypothese wäre also anzunehmen

$$\varrho' = \varrho[0.1109289];$$

der zweiten Formel (J'') gemäss ist

$$\begin{array}{rcl}
 lg R & = & 9.9951324 \\
 lg \sin(\lambda' - K'') & = & 9.0776375 \\
 lg \sin(L' - L) & = & 9.3855534 \\
 \hline
 & & 8.4583233 \\
 & & 8.4583233 \\
 & & 8.6805361 \\
 \hline
 & & 9.7777872
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 lg \sin(\lambda' - \lambda) & = & 8.9707827_n \\
 lg \sin(L' - K'') & = & 9.7097534_n \\
 \hline
 & & 8.6805361
 \end{array}$$

daher der erste Näherungswert: $lg \varrho = 9.7777872$.

Allein der Verfasser hatte ursprünglich von den angeführten sieben Beobachtungen I, VI, VII ausgewählt, in der Meinung, dadurch an Sicherheit in der Bahnbestimmung zu gewinnen; dabei wurde $tg J'$ (dort $tg J''$) die grösste Tangente. Allein schon in der ersten Parabelhypothese zeigte sich bei der Berechnung von $\sigma, \sigma', \sigma''$, dass der Komet zwischen I und VII einen heliocentrischen Bogen zurückgelegt hat, der 180° um vieles übertrifft, daher die weitere Rechnung aufgegeben werden musste. In der That war der Komet inzwischen im Perihel gewesen. Es wurden dann die genannten drei Beobachtungen I, III, VI gewählt, das Verhältnis $\varrho : \varrho''$ (dort $\varrho : \varrho'$), wie es nach Schluss der ersten Hypothese zum Vorschein kam, aber benützt und

der zweiten Hypothese zugrunde gelegt. Wir beginnen aber von vorne; die Gleichungen (J') ergaben:

$$\varrho'' = \varrho[0.1710073], \quad \lg \varrho = 9.7997027$$

Mit diesen Versuchswerten rechnen wir r , r'' , s' und gehen damit in die Euler'sche Gleichung ein; da $t'' - t = 30$ Tage, so wird

$$(r_0 + r_0'' + s_0')^{3/2} - (r_0 + r_0'' - s_0')^{3/2} = 6k(t'' - t) = 3.096379$$

Nach mehreren Versuchen erschienen $\lg \varrho_0 = 9.6691950$, $\lg \varrho_0'' = 9.8402023$, und demnach $r_0 = 1.230975$, $r_0'' = 0.4950185$, $s_0' = 0.7928933$ als Werte, die der vorliegenden Euler'schen Formel sehr nahe genügen. Aus der Gleichung der Ebene kam dann

$$\lg \varrho_0' = 9.7806437$$

Somit wird

$$r_0' = 0.91531, \quad s_0 = 0.466012, \quad s_0'' = 0.3269017$$

Man bemerke, wie nahe $s_0 + s_0'' = s_0'$ ist, so dass das Sehnen-dreieck $n - n' + n''$ fast verschwindet und die Bewegung des Kometen nahezu eine geradlinige wird. Jetzt berechnen wir nach der Formel

$$n_0'' = (r + r')^{3/2} \cos \gamma'' \sin \frac{\gamma''}{2} \cdot \sqrt{p}$$

die einzelnen Dreiecke, wobei aber $\sqrt{p}$ überall weggelassen wurde; vor allen ist

$$\gamma = 19^\circ 17' 41'', \quad \gamma' = 27^\circ 20' 50.4'', \quad \gamma'' = 8^\circ 45' 39''$$

Folglich als zweite Hypothese

$$\lg n_0 = 9.4231070, \quad \lg n_0' = 9.6777197, \quad \lg n_0'' = 9.3754040$$

Mit diesen Dreieckflächen wurde in die Ausdrücke 13) Art. 3 eingegangen und gefunden:

$$\lg \varrho = 9.6804615, \quad \lg \varrho' = 9.7974060, \quad \lg \varrho'' = 9.8824272$$

Demnach wird

$$\varrho'' = \varrho[0.2019657]$$

Wenn wir mit den soeben gewonnenen Werten von ϱ und ϱ'' die Versuche beginnen und mit Festhaltung des aufgestellten Verhältnisses $\varrho : \varrho''$ dieselben so lange fortsetzen, bis der Euler'schen Formel Genüge geschieht, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lg \varrho_0 &= 9.6831380 & \lg \varrho_0'' &= 9.8851037 \\ r_0 &= 1.2521304, & r_0'' &= 0.4826313, & s_0' &= 0.79076945 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Ebene liefert

$$\lg \varrho_0' = 9.8001175$$

Da der aufgestellten Theorie zufolge die Proportion

$$\varrho : \varrho' : \varrho'' = \varrho_0 : \varrho_0' : \varrho_0''$$

bestehen muss, so ist es hier eigentlich schon überflüssig, ϱ_0' aus der Gleichung der Ebene zu bestimmen, da man, wenn auch ϱ' früher gerechnet wurde, aus der vorliegenden Proportion ϱ_0' finden kann; aus $\varrho : \varrho' = \varrho_0 : \varrho_0'$ ergibt sich hier beispielsweise $\varrho_0' = 9.8000825$, welcher Wert mit dem obigen freilich nicht besonders stimmt. Mit Beibehaltung des früheren ϱ_0' wird dann

$$\begin{array}{lll} r_0' = 0.9324604 & s_0 = 0.4648148 & s_0'' = 0.3262033 \\ \gamma = 19^\circ 10' 33.3'' & \gamma' = 27^\circ 7' 7.8'' & \gamma'' = 8^\circ 35' 15.1'' \end{array}$$

Die Dreieckflächen nach der obigen Formel berechnet geben zur dritten Hypothese:

$$\lg n_0 = 9.4229603, \quad \lg n_0' = 9.6783369, \quad \lg n_0'' = 9.3784678$$

Aus 13) Art. 3 ergeben sich dann die zwei Distanzen:

$$\lg \varrho = 9.6794421, \quad \lg \varrho'' = 9.8822268$$

Daher

$$\varrho'' = \varrho[0.2027847]$$

Die hier zum Vorschein gekommenen Werte sind:

$$\begin{array}{lll} \lg \varrho_0 = 9.6834512 & r_0 = 1.2526196 & s_0 = 0.4649306 \\ \lg \varrho_0' = 9.8006887 & r_0' = 0.9329984 & s_0' = 0.790688 \\ \lg \varrho_0'' = 9.8862359 & r_0'' = 0.4824906 & s_0'' = 0.3260186 \\ \gamma = 19^\circ 10' 31.04'' & & \\ \gamma' = 27 \quad 6 \quad 35.7 & & \\ \gamma'' = 8 \quad 34 \quad 42.82 & & \end{array}$$

Die Dreieckflächen werden in der vierten Hypothese:

$$\lg n_0 = 9.4231308, \quad \lg n_0' = 9.6783625, \quad \lg n_0'' = 9.3783313$$

und demzufolge

$$\lg \varrho = 9.6845760, \quad \lg \varrho'' = 9.8871106$$

Daher

$$\varrho'' = \varrho[0.2025346]$$

Nach Durchrechnung derselben kommt

$$\varrho'' = \varrho[0.2026150] \text{ als fünfte Hypothese.}$$

Diese Hypothese lieferte das Verhältnis $\varrho'' = \varrho[0.2025872]$, statt derselben wurde nun in sechster Hypothese das Verhältnis $\varrho'' = \varrho[0.2025950]$ zugrunde gelegt und es kamen folgende Werte zum Vorschein:

$$\begin{array}{lll} \lg \varrho_0 = 9.6833779 & r_0 = 1.252505 & s_0 = 0.4649028 \\ \lg \varrho'_0 = 9.8005553 & r'_0 = 0.9328725 & s'_0 = 0.7907057 \\ \lg \varrho''_0 = 9.8859729 & r''_0 = 0.4825224 & s''_0 = 0.3260603 \\ & \gamma = 19^\circ 10' 31.52'' \\ & \gamma' = 27 \quad 6 \quad 43.1 \\ & \gamma'' = 8 \quad 34 \quad 50.24 \end{array}$$

Die Dreieckflächen werden sonach

$$\lg n_0 = 9.4230900, \quad \lg n'_0 = 9.6783559, \quad \lg n''_0 = 9.3783613$$

und demzufolge die Distanzen

$$\lg \varrho = 9.6833407, \quad \lg \varrho' = 9.8005212, \quad \lg \varrho'' = 9.8859337$$

daher

$$\varrho'' = \varrho[0.2025930]$$

mithin in fünf Decimalen übereinstimmend mit dem in dieser Hypothese zugrunde gelegten Verhältnisse; wir bleiben hier stehen. Es wurde geprüft, ob in der That

$$n\varrho \operatorname{tg} \beta - n'\varrho' \operatorname{tg} \beta' + n''\varrho'' \operatorname{tg} \beta'' = 0$$

ist, es ergab sich

$$0.2479199 - 0.3298517 + 0.0819284 = -0.0000034$$

Diese Probe kann nach Abschluss einer jeden Hypothese gemacht werden; ferner wurden der Controle wegen die Dreiecke berechnet nach der Formel:

$$n_0 = \frac{3k(t'' - t') \cos \gamma \sqrt{p}}{2 + \cos \gamma}$$

es kam mit Weglassung von $\sqrt{p}$

$$\lg n_0 = 9.4230186, \quad \lg n'_0 = 9.6783560, \quad \lg n''_0 = 9.3784444$$

Während also $lg n'$ übereinstimmt mit dem obigen, wie es auch sein muss, da die Hypothesen alle der Zwischenzeit $t'' - t$ anbequemt sind, weichen $lg n_0$ und $lg n_0''$ von den obigen stark ab, ein Beweis, dass die angenommenen Zeiten mit den dazu gehörigen Längen und Breiten nicht recht stimmen. Da uns alle Anhaltspunkte fehlen, um diese Ungleichheiten zu ebnen, so nehmen wir zur Grundlage der weiteren Rechnung die oben gefundenen Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' an. Im Uebergange auf die heliocentrischen Coordinaten erhalten wir:

$$\begin{aligned} l &= 120^\circ 6' 0.1'' & b &= 48^\circ 21' 7.76'' & lg r &= 0.0977592 \\ l' &= 125 \ 9 \ 56.55 & b' &= 47 \ 51 \ 56.95 & lg r' &= 9.9698076 \\ l'' &= 139 \ 2 \ 50.8 & b'' &= 45 \ 16 \ 27 & lg r'' &= 9.6835200 \\ \Omega &= 201^\circ 42' 7.1'', & i &= 131^\circ 20' 28.7'' \\ v'' - v' &= -9^\circ 52' 25'', & v'' - v &= -13^\circ 17' 24.78'' \\ v' - v &= -3^\circ 24' 59.78'' \end{aligned}$$

Somit werden die Flächen der drei Raumdreiecke

$$lg n = 8.8875294_n \quad lg n' = 9.1427871_n \quad lg n'' = 8.8427816_n$$

Weil die Unterschiede in den wahren Anomalien negativ sind, der Komet also rückläufig ist, was man auch aus $i > 90$ ersieht, so müssen auch die Dreieckflächen ein negatives Vorzeichen bekommen. Zur Controle haben wir auch die Projectionen v , v' , v'' gerechnet; es ist

$$\begin{aligned} lg v &= 8.7074294 & lg v' &= 8.9626913 & lg v'' &= 8.6626800 \\ lg \cos i &= 9.8199013_n & & 9.8199013_n & & 9.8199013_n \\ \hline lg n &= 8.8875281_n & lg n' &= 9.1427900_n & lg n'' &= 8.8427787_n \end{aligned}$$

Die Uebereinstimmung mit den obigen Werten ist im ganzen befriedigend zu nennen. Ferner ist

$$\begin{aligned} lg 4rr'r'' \sin \frac{1}{2}(v'' - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v' - v) &= 6.8257148_n \\ lg (n - n' + n'') &= 7.8967055_n \\ \hline lg p &= 8.9290093 \\ p &= 0.08492 \\ lg e \sin \frac{1}{2}(v'' + v) &= 9.6697381 & \frac{1}{2}(v'' + v) &= 152^\circ 7' 53.58'' \\ lg e \cos \frac{1}{2}(v'' + v) &= 9.9464730_n & \frac{1}{2}(v'' - v) &= -6^\circ 38' 42.39'' \\ \hline lg \tan \frac{1}{2}(v'' + v) &= 9.7232651_n & v'' &= 145^\circ 29' 11.19'' \\ lg e &= 0.0000094 & v &= 158^\circ 46' 35.97'' \end{aligned}$$

Dies würde ein Hinneigen zur Hyperbel andeuten, aber man sieht, dass in der ganzen Rechnung die letzten zwei Stellen schwanken. Rechnen wir jetzt aus den Distanzen q_0, q_0', q'' , die die Euler'sche Formel in der letzten Parabelhypothese befriedigten, parabolische Elemente, so kommt:

$$\Omega = 201^\circ 42' 30.7''$$

$$i = 131^\circ 20' 23.1''$$

$$\lg p = 8.9284641$$

$$\pi = 127^\circ 21' 4.9''$$

$$T_0 = 30.31358 \text{ März, Perihelzeit.}$$

Zur Probe wurde die geocentrische Position für 26.0 Februar 1847 gerechnet, es kam:

$$\lambda = 22^\circ 49' 1.17'', \quad \beta = 54^\circ 29' 27.17''$$

demnach

Beobachtung weniger Rechnung $d\lambda = + 7.08'', \quad d\beta = + 3.9''$

Ferner wurde die geocentrische Position für 24.0 April gerechnet, dabei wurde

$$d\lambda = - 1' 44.8'', \quad d\beta = - 1' 50.2''$$

Würden die Dreieckflächen mehr unter einander stimmen, so würde die Probe gewiss besser ausgefallen sein; übrigens können sich die Beobachtungen vom 24.0 April auf einen anderen Theil des Kometenkernes beziehen, da sich die Verhältnisse in der Hinsicht vor und nach dem Perihel ändern. Auch sieht man jetzt, wie viel besser es gewesen wäre, die erste Parabelhypothese aus $A'' = 0$ herzuleiten.

13.

Wir kehren jetzt zu der Hauptreihe 7) in Art. 10 zurück und knüpfen daran noch eine nützliche Betrachtung. Wir hatten dort gesehen, dass zur Zeit, wo der Komet in der Nähe seines Perihels sich befindet und wo er auch uns Erdenbewohnern sichtbar wird, die einzelnen mit α behafteten Glieder wegen der kleinen Radienvectoren fast ganz verschwinden, infolge dessen die Bahnbestimmung eines Kometen beinahe ausnahmslos auf eine Parabel führt. Es entsteht nun die Frage, ob die Beobachtungen eines Kometen zur Zeit, als derselbe in der Nähe seines Aphels sich befindet, wie solche vielleicht auf sehr entfernten Planeten unseres Sonnensystems möglich

sind, ebenfalls eine Parabel liefern werden und ob die eben vorgetragene Methode der Bahnbestimmung auch dann noch anwendbar wäre; oder in Hinblick auf unsere massgebende Reihe: kann a ins Unendliche wachsen und können dann bei diesem Wachsthum ins Unendliche die mit a behafteten Glieder schwinden, so dass wirklich eine Parabel zum Vorschein käme? Diese Frage muss entschieden verneint werden. Eine nur oberflächliche Betrachtung unserer Reihe zeigt, dass, wenn a wächst, auch die der Nähe des Aphels angehörenden Radienvectoren wachsen müssen; dabei kann nahe der Fall $r + r' + s'' = 4a$ eintreten wegen der oft ausserordentlich kleinen Periheldistanz des Kometen und die Zulässigkeit dieser Reihenentwicklung wird dadurch in Frage gestellt, wie aus 5) Art. 10 ersichtlich ist. Mit einem Worte, das Verschwinden der mit a behafteten Glieder lässt sich nur in der Nähe des Perihels denken, nicht aber für das Aphel, wo die Reihe 7) divergiert, oder die Bahn des Kometen wird wohl zur Zeit des Perihels zu einem Parabelstücke, ist aber sonst eine geschlossene Curve, eine Ellipse. Da aber die Bahn eines Kometen bis zum Grenzfall, der Parabel, nicht vorgehen kann, umsoweniger ist sie imstande, diese Grenze zu überschreiten, um zu einer Hyperbel zu werden. Die Kometen bewegen sich daher alle in Ellipsen von mehr oder weniger bedeutender Excentricität. Wären demnach Beobachtungen aus der Zeit des Aphels gegeben, so dürften wir nicht den obigen Kunstgriff anwenden und behufs Bestimmung der Dreieckverhältnisse zur Parabelhypothese unsere Zuflucht nehmen, weil die Reihe 7) in diesem Falle divergiert und die erwähnte Bahnbestimmung nicht zulässt, sondern wir müssten zurückgehen auf die bei den Planeten anwendbare Kreishypothese, denn zur Zeit des Aphels wird der Differentialquotient $\frac{dr}{dt}$ für eine lange Dauer sehr klein bleiben, daher die Kreishypothese erlaubt ist.

Es sei uns zum Schlusse unserer Erörterung gestattet, noch eine Ansicht über die Schweifbildung der Kometen vorzutragen. Die Beobachtungen sowohl früherer namentlich aber der neuesten Zeit haben dargethan, dass die Kometen selbstleuchtende Himmelskörper sind; auch hat man an einigen derselben Dunstatmosphären entdeckt. Der Verfasser nun ist sehr geneigt zu glauben, dass alle Kometen derartige Atmosphären besitzen, welche den Kern in mehr oder weniger kugelförmiger Gestalt umgeben. Eine solche Atmosphäre, deren Dichte mit der Entfernung nach allen Seiten hin abnimmt,

wie bei der Erde, wird vom selbstleuchtenden Körper offenbar bestrahlt, und wäre die Sonne nicht da, so würden wir eine ungemein grosse Feuerkugel vor uns haben; da aber das um vieles stärkere Licht der Sonne diesen Feuerglanz schlägt, so sehen wir nur den im Schatten des Kometen befindlichen Theil der Atmosphäre, der sich uns als ein langer glänzender Schweif darstellt und welcher also immer von der Sonne abgekehrt sein muss, wie es in der That der Fall ist.

I V. A b s c h n i t t.

Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.

Wir wenden uns jetzt wieder den Planeten zu und behandeln den in Art. 4 des III. Abschnittes erwähnten schwierigen Fall, wo der Planet bei entgegengesetzter geocentrischer Bewegung in die früher schon einmal innegehabten Positionen zurückkehrt, wodurch die drei beobachteten Orte nahezu in einen grössten Kreis zu liegen kommen und die Bahnbestimmung nach der dort vorgetragenen Methode unsicher, ja sogar unmöglich werden kann. In einem solchen Falle wird nach der obigen Discussion nahezu $\sin(M - K) = \sin(M - K') = \sin(M - K'') = 0$, also M von K, K', K'' nicht viel verschieden, weshalb die erste Gleichung 7) in III. 3

$$nq \sin(\lambda - M) - n'q' \sin(\lambda' - M) + n''q'' \sin(\lambda'' - M) = 0$$

beinahe identisch wird mit 10 α) daselbst, nämlich mit

$$nq \cdot \frac{\sin(\lambda - K') \sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} - n'q' \sin(\lambda' - K) + n''q'' \sin(\lambda'' - K) = 0$$

oder überhaupt identisch mit einer der sechs Umformungen von

$$nq \operatorname{tg} \beta - n'q' \operatorname{tg} \beta' + n''q'' \operatorname{tg} \beta'' = 0$$

daher mit dieser Gleichung selbst identisch. Da aber die erste hier angesetzte Gleichung nur eine Umformung der ersten Grundgleichung 3) in III. 3 ist, so liefern drei derartige Beobachtungen, wo der Planet sich fast in einem grössten Kreise bewegt, eigentlich nur zwei verschiedene Bedingungsgleichungen, nämlich die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} nq \cos(\lambda - M) - n'q' \cos(\lambda' - M) + n''q'' \cos(\lambda'' - M) &= m \\ nq \operatorname{tg} \beta - n'q' \operatorname{tg} \beta' + n''q'' \operatorname{tg} \beta'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 1)$$

was aber für drei Unbekannte zu wenig ist. Dieser Umstand nöthigt uns, eine vierte Beobachtung heranzuziehen und eine Methode zu

entwickeln, mittelst welcher man aus vier Beobachtungen die Entfernungen des Planeten von der Erde bestimmen kann; es handelt sich also darum, statt der Ausdrücke in 13) Art. 3 des III. Abschnittes andere aufzustellen, aus denen man mit grösserer Sicherheit die Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' , wozu dann noch ϱ''' kommt, zu berechnen imstande ist; alles übrige, die Bestimmung der Dreieckverhältnisse, die Ableitung der Bahnelemente bleibt hier unberührt und erfährt natürlich keine Abänderung. Weil vier Elemente vier Ternen geben, so werden auch vier Beobachtungen vier solche Gruppen von Gleichungen liefern, wie wir sie in 2) und 3) Art. 3 des vorigen Abschnittes finden. Wenn wir von den Gleichungen 3) daselbst ausgehen und die curtierte Distanz des Planeten von der Erde in der vierten Beobachtung mit ϱ''' bezeichnen, mit welchem Accente wir überhaupt alle dieser Beobachtung angehörenden Buchstaben versehen wollen, so hat die dortige Gruppe die Terne $\varrho\varrho'\varrho''$, die zweite Gruppe wird die Terne $\varrho\varrho'\varrho'''$ haben, die dritte $\varrho\varrho''\varrho'''$, die vierte $\varrho'\varrho''\varrho'''$. Was die neuen noch hinzukommenden Raumdreiecke anlangt, so setzen wir $n''' = rr''' \sin(v''' - v)$, $n^{IV} = r'r''', \sin(v''' - v')$, $n^V = r''r''' \sin(v''' - v'')$; zu den bereits vorhandenen Doppeldreiecken n , n' , n'' kommen also noch drei neue n''' , n^{IV} , n^V hinzu. Wenn wir nun auf den Umstand acht haben, dass in allen diesen dreigliederigen Gleichungen ein einzelnes Glied dasjenige Dreieck zum Coëfficienten hat, welches die Accente der beiden übrigen Glieder anzeigen, so können wir uns leicht analog der obigen Gleichung 1), die wir der Uebersichtlichkeit wegen hier mitnehmen, folgende vier Gruppen bilden:

$$\left. \begin{aligned}
 n\varrho \cos(\lambda - M) - n'\varrho' \cos(\lambda' - M) + n''\varrho'' \cos(\lambda'' - M) &= m \\
 n\varrho \operatorname{tg} \beta - n'\varrho' \operatorname{tg} \beta' + n''\varrho'' \operatorname{tg} \beta'' &= 0 \\
 n^{IV}\varrho \cos(\lambda - M') - n'''\varrho' \cos(\lambda' - M') + n''\varrho''' \cos(\lambda''' - M') &= m' \\
 n^{IV}\varrho \operatorname{tg} \beta - n'''\varrho' \operatorname{tg} \beta' + n''\varrho''' \operatorname{tg} \beta''' &= 0 \\
 n^V\varrho \cos(\lambda - M'') - n'''\varrho'' \cos(\lambda'' - M'') + n'\varrho''' \cos(\lambda''' - M'') &= m'' \\
 n^V\varrho \operatorname{tg} \beta - n'''\varrho'' \operatorname{tg} \beta'' + n'\varrho''' \operatorname{tg} \beta''' &= 0 \\
 n^V\varrho' \cos(\lambda' - M''') - n^{IV}\varrho'' \cos(\lambda'' - M''') + n\varrho''' \cos(\lambda''' - M''') &= m''' \\
 n^V\varrho' \operatorname{tg} \beta' - n^{IV}\varrho'' \operatorname{tg} \beta'' + n\varrho''' \operatorname{tg} \beta''' &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots 2)$$

Um das früher erwähnte Gesetz beispielsweise zu erläutern, so hat das erste Glied der zweiten Gruppe das Dreieck n^{IV} zum Coëfficienten, weil die Accente von $\varrho'\varrho'''$ in den beiden übrigen

Gliedern es so anzeigen; das zweite Glied derselben Gruppe hat n''' zum Coëfficienten, weil in den beiden übrigen Gliedern qq''' vorkommt u. s. w. Die verschiedenen m und M sind gegeben aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} nR \sin L &- n'R' \sin L' + n''R'' \sin L'' = m \sin M \\ nR \cos L &- n'R' \cos L' + n''R'' \cos L'' = m \cos M \\ n^{\text{IV}}R \sin L &- n'''R' \sin L' + n''R''' \sin L''' = m' \sin M' \\ n^{\text{IV}}R \cos L &- n'''R' \cos L' + n''R''' \cos L''' = m' \cos M' \\ n^{\text{V}}R \sin L &- n'''R'' \sin L'' + n' R''' \sin L''' = m'' \sin M'' \\ n^{\text{V}}R \cos L &- n'''R'' \cos L'' + n' R''' \cos L''' = m'' \cos M'' \\ n^{\text{V}}R' \sin L' &- n^{\text{IV}}R'' \sin L'' + n R''' \sin L''' = m''' \sin M''' \\ n^{\text{V}}R' \cos L' &- n^{\text{IV}}R'' \cos L'' + n R''' \cos L''' = m''' \cos M''' \end{aligned} \right\} \dots\dots 3)$$

Gleichungen für die Probe bilde man sich nach dem Muster 5) in III. 3.

Zur Bequemlichkeit der ferneren Entwicklung, die sehr ausgedehnt zu werden droht, führen wir jetzt ausser den Knotenlängen K, K', K'' , deren Berechnung aus 9) Art. 3 des vorigen Abschnittes keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt, noch drei Knoten K''' , K^{IV} , K^{V} ein. Zu diesem Ende verbinden wir den neu hinzugekommenen vierten Ort P''' mit jedem der drei anderen Orte durch grösste Kreise; der durch PP''' gezogene grösste Kreis treffe die Ekliptik im Punkte K''' und der Winkel, den derselbe mit der Ekliptik im Sinne der obigen Zählung einschliesst, heisse J''' ; der durch $P'P'''$ gezogene grösste Kreis schneide die Ekliptik im Punkte K^{IV} und besitze die Neigung J^{IV} zur Ekliptik; ebenso schneide der durch $P''P'''$ gezogene grösste Kreis die Ekliptik im Punkte K^{V} und habe die Neigung J^{V} zur Ekliptik; die Formeln 8) in III. 3 erweitern sich somit zu dem folgenden Complexe:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \beta &= \sin(\lambda - K') \text{tg } J' = \sin(\lambda - K'') \text{tg } J'' = \sin(\lambda - K''') \text{tg } J''' \\ \text{tg } \beta' &= \sin(\lambda' - K) \text{tg } J = \sin(\lambda' - K'') \text{tg } J'' = \sin(\lambda' - K^{\text{IV}}) \text{tg } J^{\text{IV}} \\ \text{tg } \beta'' &= \sin(\lambda'' - K) \text{tg } J = \sin(\lambda'' - K') \text{tg } J' = \sin(\lambda'' - K^{\text{V}}) \text{tg } J^{\text{V}} \\ \text{tg } \beta''' &= \sin(\lambda''' - K''') \text{tg } J''' = \sin(\lambda''' - K^{\text{IV}}) \text{tg } J^{\text{IV}} = \sin(\lambda''' - K^{\text{V}}) \text{tg } J^{\text{V}} \end{aligned} \right\} \dots\dots 4)$$

Für die Berechnung der neuen Knotenlängen K''' , K^{IV} , K^{V} gelangen wir auf demselben Wege wie oben für K, K', K'' zu folgenden Ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\lambda - K''') &= \frac{\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda''' - \lambda)}{\operatorname{tg} \beta''' - \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda''' - \lambda)} \\
 \operatorname{tg}(\lambda''' - K''') &= \frac{\operatorname{tg} \beta''' \sin(\lambda - \lambda''')}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta''' \cos(\lambda - \lambda''')} \\
 \operatorname{tg}(\lambda' - K^{\text{IV}}) &= \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda''' - \lambda')}{\operatorname{tg} \beta''' - \operatorname{tg} \beta' \cos(\lambda''' - \lambda')} \\
 \operatorname{tg}(\lambda''' - K^{\text{IV}}) &= \frac{\operatorname{tg} \beta''' \sin(\lambda' - \lambda''')}{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta''' \cos(\lambda' - \lambda''')} \\
 \operatorname{tg}(\lambda'' - K^{\text{V}}) &= \frac{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda''' - \lambda'')}{\operatorname{tg} \beta''' - \operatorname{tg} \beta'' \cos(\lambda''' - \lambda'')} \\
 \operatorname{tg}(\lambda''' - K^{\text{V}}) &= \frac{\operatorname{tg} \beta''' \sin(\lambda'' - \lambda''')}{\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta''' \cos(\lambda'' - \lambda''')}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 5)$$

Man wird auch hier wie oben diejenigen Ausdrücke wählen, die einer convergenten Reihe entsprechen, d. i. diejenigen, wo der Tangentenquotient ein echter Bruch wird; zur Probe rechne man dann J''' , J^{IV} , J^{V} doppelt aus 4).

Die weitere analytische Behandlung des Problems gestaltet sich mit Benützung des angegebenen Hilfsmittels möglichst einfach und elegant. Nehmen wir beispielsweise die beiden Gleichungen in 1) selbst vor und ersetzen die zweite, die Tangentengleichung, durch ihre Umformung 10 α) in III. 3, so dass wir haben

$$\begin{aligned}
 nq \cos(\lambda - M) - n'q' \cos(\lambda' - M) + n''q'' \cos(\lambda'' - M) &= m \\
 nq \frac{\sin(\lambda - K') \sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} - n'q' \sin(\lambda' - K) + n''q'' \sin(\lambda'' - K) &= 0
 \end{aligned}$$

Hieraus eliminieren wir $n''q''$, indem wir die erste Gleichung mit $\sin(\lambda'' - K)$, die zweite mit $\cos(\lambda'' - M)$ multiplicieren; dann kommt vermittelst Subtraction

$$\begin{aligned}
 nq \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - K')} [\sin(\lambda'' - K') \cos(\lambda - M) - \sin(\lambda - K') \cos(\lambda'' - M)] + \\
 + n'q' [\sin(\lambda' - K) \cos(\lambda'' - M) - \sin(\lambda'' - K) \cos(\lambda' - M)] = \\
 = m \sin(\lambda'' - K)
 \end{aligned}$$

oder mit Benützung einer bekannten goniometrischen Formel für das Product aus einem Sinus und Cosinus

$$nq \frac{\sin(\lambda'' - K) \sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M - K')}{\sin(\lambda'' - K')} - n'q' \sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M - K) = \\ = m \sin(\lambda'' - K)$$

Wir dividieren mit $\sin(\lambda'' - K)$, so wird schliesslich

$$nq \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M - K')}{\sin(\lambda'' - K')} - n'q' \frac{\sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M - K)}{\sin(\lambda'' - K)} = m$$

Um $n'q'$ eliminieren zu können, verbinden wir mit der Cosinusgleichung die Umformung 10 β) in III. 3, so dass wir haben

$$nq \cos(\lambda - M) - n'q' \cos(\lambda' - M) + n''q'' \cos(\lambda'' - M) = m \\ nq \frac{\sin(\lambda - K'') \sin(\lambda' - K)}{\sin(\lambda' - K'')} - n'q' \sin(\lambda' - K) + n''q'' \sin(\lambda'' - K) = 0$$

Multiplizieren wir hier die erste Gleichung mit $\sin(\lambda' - K)$, die zweite mit $\cos(\lambda' - M)$, so kommt vermittelst Subtraction

$$nq \frac{\sin(\lambda' - K)}{\sin(\lambda' - K'')} [\sin(\lambda' - K'') \cos(\lambda - M) - \sin(\lambda - K'') \cos(\lambda' - M)] + \\ + n''q'' [\sin(\lambda' - K) \cos(\lambda'' - M) - \sin(\lambda'' - K) \cos(\lambda' - M)] = m \sin(\lambda' - K)$$

Daraus erhalten wir in analoger Weise wie früher

$$nq \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos(M - K'')}{\sin(\lambda' - K'')} - n''q'' \frac{\sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M - K)}{\sin(\lambda' - K)} = m$$

Um nq eliminieren zu können, verbinden wir die Cosinusgleichung mit einer anderen passenden Umformung der Tangentengleichung, und zwar

$$nq \cos(\lambda - M) - n'q' \cos(\lambda' - M) + n''q'' \cos(\lambda'' - M) = m \\ nq \sin(\lambda - K') - n'q' \frac{\sin(\lambda' - K'') \sin(\lambda - K')}{\sin(\lambda - K'')} + n''q'' \sin(\lambda'' - K') = 0$$

Multiplizieren wir hier die erste Gleichung mit $(\sin \lambda - K')$, die zweite mit $\cos(\lambda - M)$, so kommt nach gehöriger Vereinfachung

$$n'q' \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos(M - K'')}{\sin(\lambda - K'')} - n''q'' \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M - K')}{\sin(\lambda - K')} = m$$

Die Verbindung der Cosinusgleichung mit den drei noch übrigen Umformungen der Tangentengleichung liefert nichts mehr Neues, man wird auf die bereits entwickelten drei Gleichungen geführt. Nach dem

Muster dieser drei Gleichungen für m lassen sich jetzt auch je drei für m' , m'' , m''' aus den obigen Gruppen ableiten, und zwar bloss vermittelt Analogie. So bekommen wir im ganzen dreimal vier, d. i. zwölf solcher Finalgleichungen; wir wollen dieselben sämtlich hersetzen, um damit eine Uebersicht zu gewinnen.

$$n_Q \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M - K')}{\sin(\lambda'' - K')} - n'_{Q'} \frac{\sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M - K)}{\sin(\lambda'' - K)} = m$$

$$n_Q \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos(M - K'')}{\sin(\lambda' - K'')} - n''_{Q''} \frac{\sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M - K)}{\sin(\lambda' - K)} = m$$

$$n'_{Q'} \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos(M - K'')}{\sin(\lambda - K'')} - n''_{Q''} \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M - K')}{\sin(\lambda - K')} = m$$

$$n^{IV}_Q \frac{\sin(\lambda''' - \lambda) \cos(M' - K''')}{\sin(\lambda''' - K''')} - n'''_{Q'''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda') \cos(M' - K^{IV})}{\sin(\lambda''' - K^{IV})} = m'$$

$$n^{IV}_Q \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos(M' - K'')}{\sin(\lambda' - K'')} - n'''_{Q'''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda') \cos(M' - K^{IV})}{\sin(\lambda' - K^{IV})} = m'$$

$$n'''_{Q'''} \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos(M' - K'')}{\sin(\lambda - K'')} - n'''_{Q'''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda) \cos(M' - K''')}{\sin(\lambda - K''')} = m'$$

$$n^V_Q \frac{\sin(\lambda''' - \lambda) \cos(M'' - K''')}{\sin(\lambda''' - K''')} - n'''_{Q'''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda'') \cos(M'' - K^V)}{\sin(\lambda''' - K^V)} = m''$$

$$n^V_Q \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M'' - K')}{\sin(\lambda'' - K')} - n'_{Q'} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda'') \cos(M'' - K^V)}{\sin(\lambda'' - K^V)} = m''$$

$$n'''_{Q'''} \frac{\sin(\lambda'' - \lambda) \cos(M'' - K')}{\sin(\lambda - K')} - n'_{Q'} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda) \cos(M'' - K''')}{\sin(\lambda - K''')} = m''$$

$$n^V_{Q'} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda') \cos(M''' - K^{IV})}{\sin(\lambda''' - K^{IV})} - n^{IV}_{Q''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda'') \cos(M''' - K^V)}{\sin(\lambda''' - K^V)} = m'''$$

$$n^V_{Q'} \frac{\sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M''' - K)}{\sin(\lambda'' - K)} - n_{Q''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda'') \cos(M''' - K^V)}{\sin(\lambda'' - K^V)} = m'''$$

$$n^{IV}_{Q''} \frac{\sin(\lambda'' - \lambda') \cos(M''' - K)}{\sin(\lambda' - K)} - n_{Q''} \frac{\sin(\lambda''' - \lambda') \cos(M''' - K^{IV})}{\sin(\lambda' - K^{IV})} = m'''$$

Alles dies erhalten wir aus vier beobachteten Orten, anscheinend ist es zu viel, aber es wird sich zeigen, dass in einzelnen Fällen dieser Apparat eben ausreicht. Man sieht zunächst leicht ein, dass eine von den vorgeführten vier Gruppen von Finalgleichungen für sich allein genommen eine Bahnbestimmung nicht ermöglicht, da die drei Gleichungen einer einzelnen Gruppe wohl die Verhältnisse der Distanzen, aber eine Distanz selbst nicht liefern können; um eine Distanz zu erhalten, müssen also mindestens zwei Gruppen zusammenwirken, die zwei übrigen können ganz wegfallen. Es ist nun die Frage, welche zwei von den vier Gruppen zu erwählen, welche zwei auszuschneiden sind. Damit eine Continuität in die Rechnung komme, müssen die zwei auszuwählenden Gruppen die Eigenschaft haben, dass alle darin vorkommenden Längendifferenzen $\lambda' - \lambda$, $\lambda'' - \lambda$ u. s. w. gleiche Vorzeichen besitzen, also alle entweder positiv oder negativ sind. Im ganzen geben vier Beobachtungen sechs solche Längendifferenzen, in je zwei Gruppen kommen aber zusammen genommen deren fünf vor; demnach wird man diejenigen zwei Gruppen aussuchen, wo diese fünf Längendifferenzen einerlei Vorzeichen haben, denn würde man zwei Gruppen wählen, in denen die Längendifferenzen untermischt einige positiv, andere negativ sind, so würden die zum Vorschein kommenden Distanzen beispielsweise der Gleichung

$$n\varrho \operatorname{tg} \beta - n'\varrho' \operatorname{tg} \beta' + n''\varrho'' \operatorname{tg} \beta'' = 0$$

nur schwach oder gar nicht genügen. Um also richtige und genaue Resultate zu gewinnen, muss man auf diesen Umstand wohl sehr achthaben. Weil demnach fünf Längendifferenzen gleichbezeichnet sein sollen, so ist die Auswahl des Beobachtungsmateriales auch nicht ganz gleichgiltig, sondern es muss darauf gesehen werden, dass dabei nur eine einzige der sechs Differenzen entgegengesetztes Vorzeichen erhält, was zu erreichen übrigens nie schwer sein wird; zugleich sollen die Beobachtungen möglichst weit auseinanderliegen.

Hat beispielsweise $\lambda' - \lambda$ ein den übrigen Längendifferenzen entgegengesetztes Zeichen (Gauss' Beispiel in der *theoria motus*), so sind die ersten zwei Gruppen zu verwerfen, weil sie $\sin(\lambda' - \lambda)$ enthalten, und die zwei letzten Gruppen m'' und m''' zu erwählen; der Kürze halber geben wir denselben die Form:

$$\begin{array}{ll} C''n^V\varrho - D''n''' \varrho'' = m'' & C'''n^V\varrho' - D'''n^{IV}\varrho'' = m''' \\ E''n^V\varrho - F''n'\varrho''' = m'' & E'''n^V\varrho' - F'''n\varrho''' = m''' \\ G''n''' \varrho'' - H''n'\varrho''' = m'' & G'''n^{IV}\varrho'' - H'''n\varrho''' = m''' \end{array}$$

wo die Bedeutung von C'' , $D'' \dots$, C''' , $D''' \dots$ klar ist. Die beiden in der dritten Linie stehenden Gleichungen geben nun, wenn man sie verbindet,

$$\varrho''' = \frac{G''m'''n''' - G'''m''n^{IV}}{G'''H''n'n^{IV} - G''H'''nn''''}$$

welcher Ausdruck sich für die logarithmische Rechnung etwas bequemer machen lässt, in der Weise, wie man überhaupt die Summe oder die Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen man kennt, umzuformen pflegt; es ist nämlich allgemein

$$a \pm b = a \left(1 \pm \frac{b}{a} \right)$$

wo $b < a$ angenommen wird. Ferner ist den obigen Gleichungen gemäss:

$$\varrho'' = \frac{H''n'm''' - H'''nm''}{G'''H''n'n^{IV} - G''H'''nn''''} = \frac{m''' + H'''n\varrho'''}{G'''n^{IV}}$$

$$\varrho' = \frac{m''' + F'''n\varrho'''}{E'''n^V}, \quad \varrho = \frac{m'' + F''n'\varrho'''}{E''n^V}$$

Wäre, um den zweiten nächstliegenden Fall zu berühren, $\lambda''' - \lambda''$ anders bezeichnet als die übrigen Differenzen, so müsste man die ersten zwei Gruppen auswählen, wo dann ϱ zunächst zur Bestimmung kommt; die Auflösung der betreffenden Gleichungen ist leicht.

Auch dann noch, wenn zwei Längendifferenzen gegen die übrigen eine andere Bezeichnung erhalten sollten, wird eine Bahnbestimmung möglich sein. Nehmen wir beispielsweise $\lambda' - \lambda$, $\lambda'' - \lambda$ anders bezeichnet an, so werden in der zweiten Gruppe die erste, in der dritten ebenfalls die erste und in der vierten alle Gleichungen brauchbar, mithin eine genaue Berechnung sämtlicher vier Distanzen möglich ist. Weitere Concessionen als die eben gemachten wird aber die astronomische Praxis von der Theorie nicht fordern.

Die Dreieckflächen, zwischen denen die merkwürdige Relation

$$nn''' - n'n^{IV} + n''n^V = 0$$

besteht, wie man sich leicht überzeugt, wenn man z. B. in den Gleichungen

$$nx - n'x' + n''x'' = 0$$

$$n^{IV}x - n'''x' + n''x''' = 0$$

$$n^Vx - n'''x'' + n'x''' = 0$$

$$n^Vx' - n^{IV}x'' + nx''' = 0$$

nach der Methode der gleichen Coëfficienten vorgeht und die verschiedenen x eliminieren will, diese Dreieckflächen oder vielmehr ihre Verhältnisse werden ganz so bestimmt, wie bei drei Beobachtungen; denn es existiert gewiss auch bei vier Orten ein Kreis, dessen Radius beiläufig die Mitte hält zwischen den vier Radienvectoren und wo die Dreieckverhältnisse denen in der Ellipse gleichkommen; man hat also hier

$$n : n' : n'' : n''' : n^{\text{IV}} : n^{\text{V}} = \\ = \sin(\mu_0 \tau) : \sin(\mu_0 \tau') : \sin(\mu_0 \tau'') : \sin(\mu_0 \tau''') : \sin(\mu_0 \tau^{\text{IV}}) : \sin(\mu_0 \tau^{\text{V}})$$

Da es sich im ganzen Problem nur um die Verhältnisse dieser Dreieckflächen handelt, so kann man mit den Sinussen von $\mu_0 \tau$, $\mu_0 \tau'$ u. s. w. ganz so verfahren, als ob man die Dreieckflächen selbst vor sich hätte; man braucht demnach z. B. bei der Bestimmung von m , $m' \dots$, M , $M' \dots$ aus den obigen Ausdrücken kein Bedenken zu tragen, statt n , n' u. s. w. diese Sinusse einzuführen.

Die Bahnelemente werden in derselben Weise bestimmt, wie bei drei Beobachtungen, nur dass das verfügbare Material hier un-
gemein anwächst und man eine grosse Auswahl an Formeln hat, welche letzteren sich der Leser nach dem gegebenen Muster selbst bilden mag; natürlich wird man die geeignetsten davon aussuchen und für die ganze Berechnung beibehalten.

Die hier vorgetragene Methode, aus vier Beobachtungen die Elemente einer Planetenbahn zu bestimmen, hat, wie gesagt, nur dann ihre volle Berechtigung, wenn die geocentrische Bewegung des Planeten nahezu in einem grössten Kreise vor sich geht, wo also nicht allein die Längen, sondern auch die Breiten auf Werte zurückkommen, die sie schon einmal besessen; man kann aber die Methode auch sonst anwenden, wo dieser zwingende Grund nicht vorhanden ist. Wenn die Sinusse von $M - K$ niedrig bleiben, wird sie sogar vorzuziehen sein, gehen aber diese Sinusse hoch hinauf, so wird sich die Methode aus drei Beobachtungen mehr empfehlen.

Beispiel. Gauss gibt in seiner *theoria motus* folgende vier Beobachtungen des Planeten Vesta, um daran seine dort entwickelte Methode zu erproben:

Mttl. Par. Zeit 1807	λ	β	L	$lg R$
89.505162	178° 43' 38.87"	12° 27' 6.16"	9° 21' 33.71"	9.9997990
137.344502	174 1 30.08	10 8 7.80	55 56 0.63	0.0051376
192.419502	187 45 42.23	6 47 25.51	108 35 20.32	0.0071739
251.288202	213 34 15.63	4 20 21.63	165 9 18.69	0.0030625

Man sieht allsogleich, dass hier kein genügender Grund vorliegt, die Methode aus vier Beobachtungen anzuwenden, denn wenn auch die Längen zuerst ab- und dann zunehmen, so schreiten doch die Breiten in continuierlicher Folge zurück, so dass von einer geocentrischen Bewegung des Planeten in einem grössten Kreise keine Rede ist. Das vorliegende Beobachtungsmaterial ist im Gegentheile sehr geeignet für die Methode aus drei Beobachtungen, namentlich weil die letzteren sehr weit auseinanderliegen, und zwar kann die Berechnung doppelt geführt werden, indem man einerseits die erste, dritte und vierte, anderseits die zweite, dritte und vierte Beobachtung verbindet; wir wollen aber nur unsere Methode aus vier Beobachtungen an diesem Beispiele zeigen. Von den sechs Längendifferenzen wird hier $\lambda' - \lambda$ negativ, daher wir dieselbe ganz fallen lassen; wir haben

$$\begin{aligned}
 \lambda'' - \lambda &= 9^\circ 2' 3.36'' & \lg \sin &= 9.1959692 & \lg \cos &= 9.9945787 \\
 \lambda'' - \lambda' &= 13 44 12.15 & \lg \sin &= 9.3755915 & \lg \cos &= 9.9873968 \\
 \lambda''' - \lambda'' &= 25 48 33.40 & \lg \sin &= 9.6388654 & \lg \cos &= 9.9543623 \\
 \lambda''' - \lambda &= 34 50 36.76 & \lg \sin &= 9.7568927 & \lg \cos &= 9.9141925 \\
 \lambda''' - \lambda' &= 39 32 45.55 & \lg \sin &= 9.8039331 & \lg \cos &= 9.8871184 \\
 \lg \tg \beta &= 9.3440199, & \lg \tg \beta' &= 9.2522860, & \lg \tg \beta'' &= 9.0758140 \\
 & & \lg \tg \beta''' &= 8.8801327
 \end{aligned}$$

Damit wurden die Knotenlängen $K, K', K'', K^{\text{IV}}, K^{\text{V}}$ gerechnet; der Knoten K'' fällt mit $\lambda' - \lambda$ weg. Es kam

$$\begin{aligned}
 K &= 211^\circ 53' 57.30'' & \lg \sin(\lambda' - K) &= 9.7881190_n & \lg \sin(\lambda'' - K) &= 0.6116470_n \\
 K' &= 198 1 46.58 & \lg \sin(\lambda - K') &= 9.5192367_n & \lg \sin(\lambda'' - K') &= 9.2510308_n \\
 K''' &= 228 51 55.84 & \lg \sin(\lambda - K''') &= 9.8851299_n & \lg \sin(\lambda''' - K''') &= 9.4212427_n \\
 K^{\text{IV}} &= 235 27 33.63 & \lg \sin(\lambda' - K^{\text{IV}}) &= 9.9436278_n & \lg \sin(\lambda''' - K^{\text{IV}}) &= 9.5714745_n \\
 K^{\text{V}} &= 246 37 41.00 & \lg \sin(\lambda'' - K^{\text{V}}) &= 9.9324551_n & \lg \sin(\lambda''' - K^{\text{V}}) &= 9.7367739_n
 \end{aligned}$$

Da in unserem Falle die dritte und vierte Gruppe der Finalgleichungen zur Berücksichtigung kommen, so sind m'', M'' und m''', M''' zu berechnen; die Formeln 3) geben

$$\begin{aligned}
 n^{\text{V}}[9.2109895] - n'''[9.9839043] + n'[9.4116446] &= m'' \sin M'' \\
 n^{\text{V}}[9.9939788] + n'''[9.5106608] - n'[9.9883198] &= m'' \cos M'' \\
 n^{\text{V}}[9.9233714] - n^{\text{IV}}[9.9839043] + n[9.4116446] &= m''' \sin M''' \\
 n^{\text{V}}[9.7534455] + n^{\text{IV}}[9.5106608] - n[9.9883198] &= m''' \cos M'''
 \end{aligned}$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Hiemit sind für diesen Theil der Rechnung die Vorbereitungen erledigt und wir gehen an die Bildung einer Kreishypothese; der Radius des supponierten Kreises sei $2\cdot6$; dann wird

$$\begin{array}{ll} \mu_0 \tau = 12^\circ 56' 52\cdot36'' & \lg \sin = 9\cdot3503732 = \lg n \\ \mu_0 \tau' = 24 \ 11 \ 40\cdot88 & \lg \sin = 9\cdot6126127 = \lg n' \\ \mu_0 \tau''' = 38 \ 2 \ 3\cdot91 & \lg \sin = 9\cdot7896757 = \lg n''' \\ \mu_0 \tau^{\text{IV}} = 26 \ 47 \ 15\cdot40 & \lg \sin = 9\cdot6538726 = \lg n^{\text{IV}} \\ \mu_0 \tau^{\text{V}} = 13 \ 50 \ 23\cdot05 & \lg \sin = 9\cdot3787737 = \lg n^{\text{V}} \end{array}$$

Nach Einführung dieser Dreiecke in die vorangehenden Ausdrücke ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} M'' = 274^\circ 39' 47\cdot42'' & \lg m'' = 9\cdot6537742 & m'' = 0\cdot4505824 \\ M''' = 289 \ 51 \ 6\cdot29 & \lg m''' = 9\cdot2720230 & m''' = 0\cdot1870781 \end{array}$$

Folglich ist

$$\begin{array}{ll} M'' - K' = 76^\circ 38' \ 0\cdot84'' & \lg \cos = 9\cdot3639465 \\ M'' - K''' = 45 \ 47 \ 51\cdot58 & \lg \cos = 9\cdot8433539 \\ M'' - K^{\text{V}} = 28 \ 2 \ 6\cdot42 & \lg \cos = 9\cdot9457933 \\ M''' - K = 77 \ 57 \ 8\cdot99 & \lg \cos = 9\cdot3195695 \\ M''' - K^{\text{IV}} = 54 \ 23 \ 32\cdot66 & \lg \cos = 9\cdot7650952 \\ M''' - K^{\text{V}} = 43 \ 13 \ 25\cdot29 & \lg \cos = 9\cdot8625401 \end{array}$$

Auf Grund dessen wird

$$\begin{array}{l} \lg G'' = 9\cdot0406790_n, \lg H'' = 9\cdot7151167_n, \lg E'' = 9\cdot3088849_n \\ \lg F'' = 9\cdot6522036_n \\ \lg G''' = 8\cdot9070420_n, \lg H''' = 9\cdot6254005_n, \lg E''' = 9\cdot0835140_n \\ \lg F''' = 9\cdot5689504_n \end{array}$$

Die Formeln für ϱ''' , ϱ'' , ϱ' , ϱ geben jetzt

$$\begin{array}{l} \lg \varrho''' = 0\cdot4455902, \lg \varrho'' = 0\cdot3243109, \lg \varrho' = 0\cdot1871971 \\ \lg \varrho = 0\cdot1100191 \end{array}$$

Geht man mit den Distanzen ϱ' , ϱ'' , ϱ''' behufs einer Probe in die Gleichung

$$n^{\text{V}} \varrho' \operatorname{tg} \beta' - n^{\text{IV}} \varrho'' \operatorname{tg} \beta'' + n \varrho''' \operatorname{tg} \beta''' = 0$$

ein, so kommt

$$0\cdot06580468 - 0\cdot11323937 + 0\cdot0474347 = 0$$

Wir könnten jetzt an die Bestimmung von Ω , i u. s. w. gehen, das Verfahren jedoch ist ganz so, wie oben bei Ceres, weshalb wir von der weiteren Rechnung abstecken.

Die oben entwickelten Finalgleichungen geben jede für sich das Verhältniss an, in welchem zwei Distanzen zu einander stehen, und zwar hat man für jedes einzelne Verhältniss je zwei solche Gleichungen, aus deren Verbindung dann die betreffenden zwei Distanzen hervorgehen. Diesem Verhältnisse zwischen je zwei Distanzen kann man aber auch noch eine andere, von der obigen um wenig verschiedene Form geben, die wir der Vollständigkeit halber ebenfalls entwickeln wollen. Es ist nämlich zufolge 12) Art. 3

$$\frac{nq}{q} - \frac{n'q'}{q'} = m [\sin(M - K) - \sin(M - K')]$$

Setzt man hier für q , q' die in 11) daselbst an erster Stelle stehenden Ausdrücke, welche nämlich beide $\sin(K' - K)$ enthalten, ein und löst auf der rechten Seite die Differenz der Sinusse in das entsprechende Product auf, so kommt, weil

$$\sin(K' - K) = 2 \sin \frac{1}{2}(K' - K) \cos \frac{1}{2}(K' - K) \text{ ist,}$$

$$nq \frac{\sin(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - K')} - n'q' \frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - K)} = \frac{m \cos[M - \frac{1}{2}(K' + K)]}{\cos \frac{1}{2}(K' - K)}$$

Auf diesem wenig beschwerlichen Wege findet man aus 12) Art. 3 noch die folgenden zwei Gleichungen:

$$nq \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda' - K'')} - n''q'' \frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda' - K)} = \frac{m \cos[M - \frac{1}{2}(K'' + K)]}{\cos \frac{1}{2}(K'' - K)}$$

$$n'q' \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda - K'')} - n''q'' \frac{\sin(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda - K')} = \frac{m \cos[M - \frac{1}{2}(K'' + K')]}{\cos \frac{1}{2}(K'' - K')}$$

Diese Form hat, wie man sieht, vor der obigen einiges voraus; wollte man hier m und M nicht rechnen, so setze man beispielsweise $\frac{1}{2}(K'' + K') = C$, und man hat

$$m \cos(M - C) = nR \cos(L - C) - n'R' \cos(L' - C) + n''R'' \cos(L'' - C)$$

Vier Beobachtungen liefern noch drei weitere solche Gruppen, die sich der geneigte Leser aus dem Vergleiche mit den obigen sehr leicht selbst aufstellen kann.

Weil man dennoch oft in die Lage kommen wird, m und M berechnen zu müssen, so möge hier ein Fingerzeig gegeben werden, wie diese Berechnung am kürzesten und ohne grosse Mühe geführt werden kann; aus 4) in III. 3 folgt nämlich:

$$\begin{aligned} nR \sin(L' - L) - n''R'' \sin(L'' - L') &= m \sin(L' - M) \\ nR \cos(L' - L) - n'R' + n''R'' \sin(L'' - L') &= m \cos(L' - M) \end{aligned}$$

woraus sich m und M nun mit weniger Mühe rechnen lassen; zur weiteren Vereinfachung dividire man beide Gleichungen mit n' , so dass R' für sich allein zu stehen kommt und man also linker Hand nur vier veränderliche Coëfficienten hat; statt m erhält man jetzt rechts $\frac{m}{n'}$, woraus sich m leicht findet.

Wie wir früher gesehen haben, leidet die Bahnbestimmung eines Kometen aus drei Beobachtungen an einer gewissen Unsicherheit, da wegen der kurzen Zwischenzeiten auch die Knoten K, K', K'' sehr nahe aneinander zu liegen kommen und man infolge davon höchstens auf fünf sichere Decimalen in $\varrho, \varrho', \varrho''$ zählen kann, so dass schon deswegen vom Zustandekommen einer Ellipse keine Rede sein kann. Es muss daher gerade bei Kometen die Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen als sehr rathsam erscheinen, namentlich wenn es sich um eine definitive Festsetzung der Elemente handelt, die aus einer einzelnen Erscheinung abgeleitet werden können. Es ist auch *a priori* einleuchtend, dass vier beobachtete Orte einen genaueren Curvenzug liefern werden als drei, und es darf der Gedanke, dass man auf diese Weise eine wenigstens annähernd richtige Ellipse erhalten kann, nicht ausgeschlossen werden, zumal wenn die Beobachtungen recht weit auseinanderliegen. Die Berechnung selbst wird freilich etwas umständlicher, da man in der ersten Parabelhypothese noch eine zweite Gleichung der Ebene benöthiget und von den Winkeln γ jedesmal noch mindestens zwei weitere bestimmt werden müssen, um die Dreieckverhältnisse bilden zu können; die betreffenden Formeln sind nach dem Muster der obigen leicht herzustellen.

V. Abschnitt.

Die Ellipse der Erdbahn.

Wie wir gesehen haben, bedarf man bei der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen genauer Sonnenorte und es ist somit die Kenntnis der Erdbahnelemente die erste und wichtigste Bedingung jeder Bahnbestimmung; wir geben deshalb im Nachfolgenden in aller Kürze eine Methode für die Berechnung der Erdbahnelemente aus drei beobachteten Sonnenlängen, eine Methode, die sich an die vorangehende Theorie der Bahnbestimmung enge anschliesst und eigentlich nur eine Spezialisierung derselben ist. Bei der Erdbahn ist $i = 0$, daher fallen hier Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens weg, und da ausserdem $a = 1$ angenommen wird, so kämen im Grunde nur drei Elemente, die Excentricität, Länge des Perihels und die Perihelzeit zur Berechnung, aber dafür, dass wir willkürlich $a = 1$ setzen, muss ein genauer Wert für die siderische Umlaufszeit der Erde eintreten. Als solcher wird uns in II. 7 angegeben $U = 365 \cdot 256374$ mittlere Sonnentage;* daraus erhält man als tägliche

* Man findet die siderische Umlaufszeit aus der tropischen, die wir mit U' bezeichnen wollen. Der Frühlingspunkt F bewegt sich in einer der Erdbewegung entgegengesetzten Richtung, daher das tropische Jahr, d. i. der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Frühlingsdurchgänge der Sonne durch den Aequator, etwas kürzer ist als das siderische; dieses jährliche Zurückgehen des Frühlingspunktes, Präcession genannt, beträgt nach I. 4

$$p = \frac{d\psi}{dt} = 50 \cdot 23465'' + 0 \cdot 00022576'' t$$

wobei, wie oben, das Jahr 1850 als Ausgangsepoche angenommen ist. Um nun die tropische Umlaufszeit U' durch die siderische U auszudrücken, bringe man von U die Zeit in Abzug, welche die Erde braucht, um den Bogen p zu durch-

mittlere Bewegung (siderisch)

$$\mu = \frac{360^\circ}{U} = 3548 \cdot 1926'', \quad \lg \mu = 3 \cdot 5500072$$

Diese mittlere Bewegung als bekannt vorausgesetzt stellen wir uns jetzt die Aufgabe, aus drei beobachteten, auf ein bestimmtes Aequinoctium reducierten Sonnenlängen L, L', L'' sammt deren Zwischenzeiten $t'' - t' = \tau, t'' - t = \tau', t' - t = \tau''$ die Ellipse der Erdbahn näher festzusetzen.

Es seien R, R', R'' die drei entsprechenden Entfernungen der Erde von der Sonne, so sind die drei Doppeldreiecke unserer früheren Bezeichnung gemäss

$$N = R'R'' \sin(L'' - L'), \quad N' = RR'' \sin(L'' - L), \\ N'' = RR' \sin(L' - L)$$

Daraus ergibt sich allsogleich

$$R = R' \cdot \frac{N'}{N} \cdot \frac{\sin(L'' - L')}{\sin(L'' - L)}, \quad R'' = R' \cdot \frac{N'}{N''} \cdot \frac{\sin(L' - L)}{\sin(L'' - L)} \dots 1)$$

Setzt man der Kürze halber

$$\alpha = \frac{N'}{N} \cdot \frac{\sin(L'' - L')}{\sin(L'' - L)}, \quad \beta = \frac{N'}{N''} \cdot \frac{\sin(L' - L)}{\sin(L'' - L)} \dots 2)$$

so ist einfach

$$R = R'\alpha, \quad R'' = R'\beta \dots 3)$$

Bezeichnet man mit π die Länge des Perihels und mit v irgend eine wahre Anomalie der Erde, so ist, wenn L die Bedeutung der von der Erde aus gemessenen Länge beibehält,

$$v = 180 + L - \pi \dots 4)$$

laufen; für einen vollen Grad benöthigt sie $U : 360^\circ$ Tage, für eine Bogensekunde hingegen, da $360^\circ = 1296000''$ ist, $U : 1296000$ Tage, mithin für p Bögensecunden

$$\frac{Up''}{1296000} \text{ Tage.}$$

Zieht man diesen Zeitbetrag von U ab, so wird

$$U' = U - \frac{Up''}{1296000} = U \left(1 - \frac{p''}{1296000} \right)$$

aus welcher Gleichung sich U bestimmen lässt. Weil sich die Durchgänge der Sonne durch den Aequator mit ziemlicher Schärfe ermitteln lassen, so unterliegt die Bestimmung der Länge des tropischen Jahres keiner besonderen Schwierigkeit.

Sind nun v, v', v'' die den drei Sonnenorten entsprechenden wahren Anomalien der Erde und setzt man

$$v'' - v' = L'' - L' = 2f, v'' - v = L'' - L = 2f', v' - v = L' - L = 2f''$$

so wird der halbe Parameter p der Erdbahnellipse gemäss 5) in III. 8

$$p = R' \cdot \frac{4\alpha\beta \sin f \sin f' \sin f''}{\beta \sin 2f - \alpha\beta \sin 2f' + \alpha \sin 2f''} \dots\dots\dots 5)$$

Führt man diesen Wert von p in 6) daselbst ein, so kommt

$$\left. \begin{aligned} e \sin \frac{1}{2}(v'' + v) &= \frac{2(\beta - \alpha) \sin f \sin f''}{\beta \sin 2f - \alpha\beta \sin 2f' + \alpha \sin 2f''} \\ e \cos \frac{1}{2}(v'' + v) &= \frac{1}{\cos f'} \left[\frac{2(\beta + \alpha) \sin f \sin f' \sin f''}{\beta \sin 2f - \alpha\beta \sin 2f' + \alpha \sin 2f''} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots 6)$$

woraus sich v, v'' und e findet, wenn einmal α und β bekannt sind. Weiters hat man dann, wenn $e = \sin \varphi$ gesetzt wird, wie oben

$$\operatorname{tg} E = \operatorname{tg} \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{v}{2} \dots\dots\dots 7)$$

$$M = E - e \sin E = \mu t \dots\dots\dots 8)$$

$$\mu = \frac{M'' - M}{t'' - t} = 3548 \cdot 1926'' \dots\dots\dots 9)$$

Wie man demnach sieht, besteht die Hauptsache der ganzen Bahnbestimmung in der Ermittlung der Grössen α und β oder in der Festsetzung der Dreieckverhältnisse $N : N' : N''$; wir können aber auch hier setzen

$$N : N' : N'' = \sin(\mu_0 \tau) : \sin(\mu_0 \tau') : \sin(\mu_0 \tau'')$$

$$\mu_0 = \frac{k \sqrt{1 + m}}{R_0^{3/2}}$$

oder wenn man für k seinen Wert aus 3) in II. 8 substituiert,

$$\mu_0 = \frac{3548 \cdot 1926''}{\left(\frac{R_0}{a} \right)^{3/2}}$$

Wir nehmen, wie früher, $a = 1$ an und drücken demzufolge R_0 , den Radius des supponierten Kreises, in Einheiten der grossen Halbachse a aus. Weil die Elemente der Erdbahn schon mit ziemlicher Genauigkeit bekannt sind, so nehme man für den ersten Versuch R_0 gleich dem Radiusvector R' der mittleren Beobachtung

an, den man aus den bekannten Elementen berechnet, und bestimme darnach α und β ; sollten diese beiden Grössen noch stark abweichen von dem Verhältnisse, welches die bekannten Elemente liefern, so wird man R_0 so lange ändern, bis α und β mit dem erwähnten Verhältnisse in drei oder vier Decimalen stimmen. Dann erst führe man α und β mit Uebergang von 5) in die Formel 6) ein und rechne v , v'' und e ; weiters bestimme man E , E'' aus 7), M , M'' aus 8) und schliesslich μ aus 9); kommt der dort angesetzte numerische Wert von μ zum Vorschein, so ist die Bahnbestimmung auch schon zu Ende geführt, denn aus 4) erhält man dann die Länge des Perihels und aus 8) die Perihelzeit. Hat aber 9) einen anderen Wert geliefert, so beginne man mit einem etwas geänderten R_0 die ganze Rechnung von vorne und setze die Versuche so lange fort, bis schliesslich 9) vollkommen befriediget wird.

Nimmt man dann auch in der Gleichung

$$p = a(1 - e^2)$$

$a = 1$ an, so wird $p = 1 - e^2 = \cos^2 \varphi$; diesen Wert setze man in 5) statt p hin und bestimme darnach R' und aus 3) R , R'' , womit die ganze Aufgabe als gelöst erscheint.

Setzt man in 4) statt π die Grösse $180 + \pi$, welche Grösse man das Perigäum nennt, so bedeutet v die wahre Anomalie der Sonne von der Erde als Standpunkt aus gezählt, wie dies in den Ephemeriden üblich ist.

Die Ellipse der Mondbahn.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren lässt sich auch die Ellipse der Mondbahn bestimmen. Die wahre oder siderische Umlaufszeit des Mondes um die Erde beträgt nach Hansen $U = 27.321661$ Tage, daher die mittlere tägliche Bewegung

$$\mu = 47434.891'', \quad \lg \mu = 4.6760979$$

oder $13^\circ 10' 34.891''$. Bekanntlich wird U beim Monde aus der tropischen und diese aus der synodischen Umlaufszeit abgeleitet, welche letztere sich aus unmittelbarer Beobachtung ergibt. Beziehen wir alles in I. 1 Gesagte auf das Verhältnis zwischen Erde und Mond und setzen dort statt der Sonne die Erde, die wir uns in unserem Falle als ruhend, die Sonne hingegen als in der Ekliptik kreisend denken, und statt des Planeten den Mond, so haben wir ein Welt-system, dessen Mittelpunkt die Erde bildet. Die in I. 1 gewählten

Bezeichnungen tragen wir alle auf den Mond über und es sei i die Neigung, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn, π die Länge des Perigäums, l , b die geocentrische Länge und Breite des Mondes u. s. w.; es gelten dann ebenso auch die Formeln 1) und 2) daselbst. Vermittelst 4), 5), 6) in III. 11 findet man vor allen Ω , i , u , u' , u'' , wenn wir voraussetzen, dass aus der Beobachtung drei geocentrische Längen und Breiten des Mondes gegeben sind. Die Unterschiede der Breitenargumente liefern dann $v'' - v' = 2f$, $v'' - v = 2f'$, $v' - v = 2f''$; wenn ferner r , r' , r'' die drei Entfernungen des Mondes von der Erde bedeuten, so sind die drei Doppeldreiecke im Raume ausgedrückt durch

$$n = r'r'' \sin 2f, \quad n' = rr'' \sin 2f', \quad n'' = rr' \sin 2f''$$

Daraus folgt unmittelbar

$$r = r' \cdot \frac{n'}{n} \cdot \frac{\sin 2f}{\sin 2f'} \quad r'' = r' \cdot \frac{n'}{n''} \cdot \frac{\sin 2f''}{\sin 2f'}$$

so dass auch hier gesetzt werden kann $r = r'\alpha$, $r'' = r'\beta$; das weitere Verfahren ist ganz so wie oben bei der Erdbahn. Als tägliche Bewegung im supponierten Kreise hat man

$$\mu_0 = \frac{47434 \cdot 891''}{\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3/2}}$$

wo a die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde bedeutet; setzt man $a = 1$, so ist dann r_0 der in Einheiten von a ausgedrückte Radius des Kreises; in diesem Masse sind auch r , r' , r'' auszudrücken. Es versteht sich von selbst, dass die der Beobachtung entlehnten Längen und Breiten des Mondes wegen der von der Sonne bewirkten Störungen zu corrigieren sind, bevor man zur Bahnbestimmung sich anschickt.

VI. Abschnitt.

Störungen (Problem der drei Körper).

Unserer Auseinandersetzung in II. 3 zufolge beträgt die Beschleunigung, mit der ein Planet oder Komet zur Sonne gezogen wird

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g = - \frac{k^2(1+m)}{r^2} \dots\dots\dots 1)$$

Die Sonne zieht den Körper mit der Beschleunigung $\frac{k^2}{r^2}$ an sich, der Körper hingegen, dessen Masse, in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückt, m ist, theilt der Sonne die Beschleunigung $\frac{mk^2}{r^2}$ mit; die Bewegung der Sonne, infolge welcher dieselbe dem Planeten wirklich genähert wird, kann aber nach dem Principe der relativen Bewegung auf den letzteren übertragen und die Sonne dabei als ruhend gedacht werden, denn für den Effect der Bewegung und die daraus resultierende gegenseitige Entfernung zweier Körper ist es gewiss dasselbe, ob ich mir denke, dass ein jeder von beiden ein gewisses Stück Weges behufs gegenseitiger Näherung zurückgelegt hat, oder dass nur einer von beiden sich bewegt, dafür aber die Summe beider Wege macht. Weil bei der Bewegung zum Centralkörper die Radienvectoren des Planeten oder Kometen verringert werden, so bekommt der Ausdruck für diese Gesammtanziehung negatives Vorzeichen, wie dies oben bereits gesagt worden ist.

Die Anziehung, welche ein Planet von der Masse m auf einen anderen in der Entfernung $r = \Delta : a$ (wo Δ die wirkliche Entfernung der beiden Körper und a die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bezeichnet) stehenden Körper ausübt, ist ganz allgemein ausgedrückt durch

$$\frac{mk^2}{r^2}$$

mag nun der angezogene Körper die Sonne oder ein anderer Himmelskörper sein, und weil sich diese Anziehung nach allen Seiten hin im Weltraume äussert, so kann sie nicht ohne Wirkung bleiben auf die übrigen Körper des Sonnensystems. Ein einzelner Himmelskörper wird daher nicht allein vom Centralkörper, der Sonne, sondern auch von allen übrigen Himmelskörpern angezogen. Die Stärke dieser Anziehung hängt sowohl von der Masse als auch von der Entfernung des anziehenden Körpers ab. Der oben an die Spitze gestellte Ausdruck bezeichnet demnach nicht die gesammte Anziehung, die ein Planet oder Komet erfährt, sondern es zerren an ihm nebst der Sonne auch alle übrigen Himmelskörper des Sonnensystems und suchen ein jeder nach seinen Kräften ihn an sich zu ziehen; dadurch wird die Bahn des Planeten oder Kometen gestört und nicht dieselbe ursprüngliche Ellipse mehr, wie sie es ohne diese Störungen wäre.

Betrachten wir der Einfachheit wegen, wie ein einzelner Planet mit mehr oder weniger beträchtlicher Masse, z. B. Jupiter, auf einen anderen Himmelskörper einwirkt. Seine, des störenden Planeten, Masse sei m' , die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten eines seiner Orte seien x_1, y_1, z_1 , während m die Masse des gestörten Körpers und x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Ortes in seiner Bahn bezeichnen mögen. Bezeichnen wir die Entfernung beider Himmelskörper mit ϱ , so ist bekanntlich

$$\varrho^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

und die Beschleunigung, mit welcher der störende (Jupiter) auf den gestörten Planeten oder Kometen einwirkt

$$+ \frac{m'k^2}{\varrho^2}$$

Wir geben dieser Beschleunigung ein positives Vorzeichen, weil sie der Bewegung zur Sonne hin entgegenwirkt und den Radiusvector des gestörten Körpers zu verlängern trachtet. — Dazu kommt noch die Anziehung, die der störende Planet auf die Sonne ausübt; ist r , der Radiusvector oder seine Entfernung von der Sonne, so ist die Beschleunigung, mit der er die Sonne an sich zieht, ausgedrückt durch

$$\frac{m'k^2}{r^2}$$

um dabei die Sonne als ruhig denken zu können, übertragen wir diese Beschleunigung auf den störenden Planeten selbst und nehmen

deshalb wie beim gestörten Körper diesen Ausdruck negativ. Es wird demnach mit Hinzuziehung eines einzelnen störenden Körpers die Gesamtwirkung auf den gestörten

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g = - \frac{k^2(1+m)}{r^2} + \frac{m'k^2}{\varrho^2} - \frac{m'k^2}{r'^2}$$

oder

$$\frac{d^2s}{dt^2} = - \frac{k^2(1+m)}{r^2} + m'k^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r'^2} \right) \dots\dots 2)$$

Wie man sieht, enthält das zweite Glied rechts vom Gleichheitszeichen den Ausdruck für die Störung; wollte man noch die von anderen Planeten ausgehenden Störungen zum Ausdruck bringen, so müsste man ebensoviele ähnlich gebaute Glieder hinzufügen. Wir nehmen aber der Einfachheit wegen nur einen einzigen störenden Planeten an, weil ja ohnehin die Störungen der einzelnen Planeten abgesondert berechnet werden müssen; die algebraische Summe der Einzelstörungen gibt dann die Gesamtstörung.

Wir ersehen vor allen, dass für $\varrho = r$, das Störungsglied der Null gleich wird oder der gestörte Körper wird sich in der Nähe der Quadratur mit dem störenden mit ungestörter Geschwindigkeit bewegen; aus diesem Grunde wird die von der Sonne auf den Mond wirkende Störung zur Zeit des ersten oder letzten Viertels vernichtet. Auch sieht man, dass das Störungsglied bald positiv, bald negativ wird, je nachdem r , grösser oder kleiner als ϱ ist. Nähert sich der gestörte dem störenden Körper, so wird ϱ sehr klein und die Störung eine bedeutende, was bei Kometen öfters sich ereignen wird.

In der ungestörten Bewegung also war

$$\frac{d^2s}{dt^2} = - \frac{k^2(1+m)}{r^2}$$

in der gestörten hingegen, um den Unterschied auch äusserlich zu kennzeichnen,

$$\frac{d^2s'}{dt^2} = - \frac{k^2(1+m)}{r^2} + m'k^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r'^2} \right)$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der vorangehenden, so wird, wenn wir den Grundsätzen der Differentialrechnung gemäss $d^2s - d^2s' = d^3s$ setzen,

$$\frac{d^3s}{dt^2} = m'k^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r'^2} \right) \dots\dots\dots 3)$$

Dies ist die eigentliche und wahre Störungsgleichung, die uns im Folgenden als Grundlage dienen wird; denn es ist klar, dass d^3s den Störungsbetrag enthält und dass die Integration der vorstehenden Differentialgleichung zum gewünschten Ziele führen muss. Um einen vollständigen Differential-Quotienten dritter Ordnung zu erhalten, könnten wir auch schreiben:

$$\frac{d^3s}{dt^3} = - \frac{m'k^2}{dt} \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r,^2} \right)$$

allein wir bleiben der Einfachheit wegen bei der früheren Form 3). Wir zerlegen nun die beiden Beschleunigungen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Componenten, parallel zu den rechtwinkligen Achsen unseres durch die Sonne gelegten Coordinatensystems; die Beschleunigung $\frac{m'k^2}{\varrho^2}$ zerlegen wir in Rücksicht auf die Gleichung:

$$\varrho^2 = (x, - x)^2 + (y, - y)^2 + (z, - z)^2$$

in die drei Componenten

$$\frac{m'k^2(x, - x)}{\varrho^3}, \quad \frac{m'k^2(y, - y)}{\varrho^3}, \quad \frac{m'k^2(z, - z)}{\varrho^3}$$

Die Beschleunigung $\frac{m'k^2}{r,^2}$ hingegen in Betrachtung des Umstandes, dass

$$r,^2 = x,^2 + y,^2 + z,^2$$

ist, in die drei Componenten

$$\frac{m'k^2x,}{r,^3}, \quad \frac{m'k^2y,}{r,^3}, \quad \frac{m'k^2z,}{r,^3}$$

dann zerfällt die Gleichung 3) in folgende drei:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^2} &= - m'k^2 \left(\frac{x, - x}{\varrho^3} - \frac{x,}{r,^3} \right) \\ \frac{d^3y}{dt^2} &= - m'k^2 \left(\frac{y, - y}{\varrho^3} - \frac{y,}{r,^3} \right) \\ \frac{d^3z}{dt^2} &= - m'k^2 \left(\frac{z, - z}{\varrho^3} - \frac{z,}{r,^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

Von hier aus stehen uns jetzt zwei Wege offen, und zwar führt der eine zu den Störungen in den Elementen der Bahn selbst, der zweite zu denen in den Coordinaten. Dieser doppelten Behandlung

des Problems entsprechend, hätten wir auch den einen Differentialquotienten dritter Ordnung in zwei partielle Differentialquotienten zweiter Ordnung zerfallen können, wie wir dies weiter unten zeigen werden, allein das hier eingeschlagene Verfahren scheint uns instructiver und dem Anfänger zugänglicher zu sein.

2.

Wir multiplicieren in 4) des vorangehenden Artikels die erste Gleichung mit y , die zweite mit x und subtrahieren, dann kommt, wenn wir auch im übrigen analog verfahren,

$$xd^3y - yd^3x = -m'k^2(xy, - x,y) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r^3} \right) dt^2$$

$$xd^3z - zd^3x = -m'k^2(xz, - x,z) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r^3} \right) dt^2$$

$$yd^3z - zd^3y = -m'k^2(yz, - y,z) \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r^3} \right) dt^2$$

Hierin sind, wie wir schnell erkennen, $xy, - x,y$, $xz, - x,z$, $yz, - y,z$ die drei Projectionsdreiecke des von der Sonne, dem gestörten und störenden Körper gebildeten Raumdreieckes; bezeichnen wir die doppelte Fläche des letzteren mit f , die Länge des aufsteigenden Knotens der durch dieses Raumdreieck repräsentierten Ebene mit w , die Neigung derselben zur Ekliptik mit h , so ist einer früheren Bezeichnung gemäss [sieh 6) in II. 4]:

$$v = xy, - x,y = f \cos h$$

$$v_1 = xz, - x,z = f \cos w \sin h$$

$$v_{11} = yz, - y,z = f \sin w \sin h$$

Setzen wir noch der Kürze halber $\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r^3} = D$, so wird

$$\left. \begin{aligned} xd^3y - yd^3x &= -m'k^2 D f \cos h dt^2 \\ xd^3z - zd^3x &= -m'k^2 D f \cos w \sin h dt^2 \\ yd^3z - zd^3y &= -m'k^2 D f \sin w \sin h dt^2 \end{aligned} \right\} \dots \alpha)$$

Die Berechnung von f , w , h unterliegt keiner Schwierigkeit, denn wie in III. 8 haben wir auch hier

$$tg w = \frac{v_{11}}{v_1}, \quad tg h = \frac{v_1}{v \cos w} = \frac{v_{11}}{v \sin w}, \quad f = \frac{v}{\cos h}$$

ν, ν_1, ν_2 kann man statt aus den rechtwinkligen auch aus den Polarcoordinaten rechnen; es ist nämlich nach I. 2

$$\begin{aligned} x &= r \cos b \cos l & x_1 &= r_1 \cos b_1 \cos l_1 \\ y &= r \cos b \sin l & y_1 &= r_1 \cos b_1 \sin l_1 \\ z &= r \sin b & z_1 &= r_1 \sin b_1 \end{aligned}$$

Darnach ist

$$\begin{aligned} \nu &= xy_1 - x_1 y = f \cos h = rr_1 \cos b \cos b_1 \sin(l_1 - l) \\ \nu_1 &= xz_1 - x_1 z = f \cos w \sin h = rr_1 (\cos b \sin b_1 \cos l - \sin b \cos b_1 \cos l_1) \\ \nu_2 &= yz_1 - y_1 z = f \sin w \sin h = rr_1 (\cos b \sin b_1 \sin l - \sin b \cos b_1 \sin l_1) \end{aligned}$$

Wir können uns die Sache aber noch bequemer machen und zugleich der Genauigkeit Rechnung tragen. Denken wir uns in Fig. 1 einen grössten Kreis gezogen, der den störenden Planeten mit dem Orte P des gestörten Himmelskörpers verbindet; die Ebene, in der dieser grösste Kreis liegt, ist offenbar die Ebene des erwähnten Raumdreieckes f , deren aufsteigenden Knoten wir mit w und die Neigung zur Ekliptikebene mit h bezeichnet haben; fällen wir dann von den beiden Orten Senkrechte auf die Ekliptik, so sind diese Senkrechten die entsprechenden Breiten und wir haben

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} h \sin(l - w), \quad \operatorname{tg} b_1 = \operatorname{tg} h \sin(l_1 - w) \dots A)$$

Daraus ergibt sich aber bekanntermassen

$$\operatorname{tg}(l - w) = \frac{\operatorname{tg} b \sin(l_1 - l)}{\operatorname{tg} b_1 - \operatorname{tg} b \cos(l_1 - l)}, \quad \operatorname{tg}(l_1 - w) = \frac{\operatorname{tg} b_1 \sin(l - l_1)}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b_1 \cos(l - l_1)} \dots B)$$

Man rechnet also zuerst w aus $B)$ und dann h aus $A)$. Bezeichnen wir ferner den im erwähnten Raumdreiecke von den Radienvectoren r und r_1 eingeschlossenen, mithin den an der Sonne befindlichen, Winkel mit V , so ist

$$f = rr_1 \sin V \dots C)$$

Wir haben daher

$$\nu = f \cos h = rr_1 \sin V \cos h = rr_1 \cos b \cos b_1 \sin(l_1 - l)$$

daraus folgt

$$\sin V \cos h = \cos b \cos b_1 \sin(l_1 - l)$$

Weiters ist der Entwicklung des Ausdruckes für σ auf Seite 77 gemäss

$$rr, \cos V = xx, + yy, + zz,$$

Ersetzt man hierin die rechtwinkligen durch die entsprechenden Polarcoordinaten, so wird

$$\cos V = \sin b \sin b, + \cos b \cos b, \cos(l, - l)$$

Für die Bestimmung des Winkels V haben wir sonach die Gleichung

$$\operatorname{tg} V \cos h = \frac{\sin(l, - l)}{\operatorname{tg} b \operatorname{tg} b, + \cos(l, - l)} \dots \dots \dots D)$$

Ist V bestimmt, so rechne man dann f aus C); um auch der Berechnung von ϱ durch die rechtwinkligen Coordinaten überhoben zu sein, so ist

$$\varrho^2 = r^2 + r,^2 - 2rr, \cos V \dots \dots \dots E)$$

Nachdem wir so in diesen Theil der Rechnung eine gewisse Bequemlichkeit und zugleich Sicherheit gebracht haben, fahren wir in unserer Entwicklung weiter.

Zufolge 4) in II. 5 und 1) in II. 7 ist ferner

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = k \sqrt{p(1+m)} \cos i$$

$$x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} = k \sqrt{p(1+m)} \cos \Omega \sin i$$

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = k \sqrt{p(1+m)} \sin \Omega \sin i$$

In der ungestörten Bewegung sind p , Ω , i constant und die Differentiation dieser drei Gleichungen führt auf 2) in II. 4, nämlich:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$x \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

In der gestörten Bewegung hingegen sind p , Ω , i als veränderliche Grössen anzusehen und man erhält mittelst Differentiation

$$\begin{aligned}
 x \frac{d^2 y'}{dt^2} - y \frac{d^2 x'}{dt^2} &= \frac{k \sqrt{p(1+m)}}{dt} \left(\frac{dp}{2p} \cos i - \sin i di \right) \\
 x \frac{d^2 z'}{dt^2} - z \frac{d^2 x'}{dt^2} &= \\
 &= \frac{k \sqrt{p(1+m)}}{dt} \left(\frac{dp}{2p} \cos \Omega \sin i + \cos \Omega \cos i di - \sin \Omega \sin i d\Omega \right) \\
 y \frac{d^2 z'}{dt^2} - z \frac{d^2 y'}{dt^2} &= \\
 &= \frac{k \sqrt{p(1+m)}}{dt} \left(\frac{dp}{2p} \sin \Omega \sin i + \sin \Omega \cos i di + \cos \Omega \sin i d\Omega \right)
 \end{aligned}$$

Subtrahiert man von den ungestörten Bewegungsgrössen die gestörten und bedenkt, dass der obigen Auseinandersetzung gemäss $d^2 x - d^2 x' = d^3 x$, $d^2 y - d^2 y' = d^3 y$, $d^2 z - d^2 z' = d^3 z$ die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten bedeuten, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 x d^3 y - y d^3 x &= - k \sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \cos i - \sin i di \right) dt \\
 x d^3 z - z d^3 x &= \\
 &= - k \sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \cos \Omega \sin i + \cos \Omega \cos i di - \sin \Omega \sin i d\Omega \right) dt \\
 y d^3 z - z d^3 y &= \\
 &= - k \sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \sin \Omega \sin i + \sin \Omega \cos i di + \cos \Omega \sin i d\Omega \right) dt
 \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser drei Gleichungen und der in α) sind nun einander gleich, folglich sind es auch die rechten und man hat

$$\begin{aligned}
 \sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \cos i - \sin i di \right) &= m' k Df \cos h dt \\
 \sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \cos \Omega \sin i + \cos \Omega \cos i di - \sin \Omega \sin i d\Omega \right) &= \\
 &= m' k Df \cos w \sin h dt \\
 \sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \sin \Omega \sin i + \sin \Omega \cos i di + \cos \Omega \sin i d\Omega \right) &= \\
 &= m' k Df \sin w \sin h dt
 \end{aligned}$$

welche drei Gleichungen ihrer Ableitung zufolge ganz strenge sind. Multiplicieren wir hier die zweite Zeile mit $\sin \Omega$, die dritte mit $\cos \Omega$, so erscheint vermittelst Subtraction

$$\sqrt{p(1+m)} \sin i d\Omega = m'kDf \sin(w - \Omega) \sin h dt \dots \beta)$$

Multiplicieren wir hingegen die zweite Zeile mit $\cos \Omega$, die dritte mit $\sin \Omega$, so kommt vermittelst Addition

$$\sqrt{p(1+m)} \left(\frac{dp}{2p} \sin i + \cos i di \right) = m'kDf \cos(w - \Omega) \sin h dt$$

Damit verbinden wir jetzt die erste Zeile oben und multiplicieren dieselbe mit $\sin i$, die vorstehende aber mit $\cos i$; vermittelst Subtraction wird dann

$$\sqrt{p(1+m)} di = m'kDf [-\cos h \sin i + \sin h \cos i \cos(w - \Omega)] dt \dots \gamma)$$

Multiplicieren wir hingegen die erste Zeile oben mit $\cos i$ und die frühere mit $\sin i$, so erscheint vermittelst Addition

$$\sqrt{1+m} dp = 2\sqrt{p} m'kDf [\cos h \cos i + \sin h \sin i \cos(w - \Omega)] dt \dots \delta)$$

Denken wir uns wieder in Fig. 1 den früher erwähnten grössten Kreis gezogen, welcher den störenden Planeten mit dem Orte P des gestörten Himmelskörpers verbindet und der vorangehenden Erörterung zufolge die Ekliptik im Punkte w schneidet, so haben wir ein sphärisches Dreieck $\Omega P w$, worin zwei Seiten $w - \Omega$ und $u = \pi + v - \Omega$ und ebenso die beiden Neigungswinkel i und $180 - h$ bekannt sind; bezeichnen wir den der Grundlinie $w - \Omega$ gegenüberliegenden Winkel mit ϑ , so finden den Formeln der sphärischen Trigonometrie gemäss folgende Beziehungen statt:

$$\cos \vartheta = \cos h \cos i + \sin h \sin i \cos(w - \Omega)$$

$$\sin \vartheta \sin u = \sin h \sin(w - \Omega)$$

$$\sin \vartheta \cos u = -\cos h \sin i + \sin h \cos i \cos(w - \Omega)$$

Man rechnet ϑ am bequemsten aus der mittleren dieser drei Gleichungen und bestimmt das Vorzeichen von $\cos \vartheta$ aus der ersten derselben.

In Berücksichtigung dessen erhalten wir aus $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{m'kDf \sin \vartheta \sin u}{\sqrt{p(1+m)} \sin i}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{m'kDf \sin \vartheta \cos u}{\sqrt{p(1+m)}}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{p} m'kDf \cos \vartheta}{\sqrt{1+m}}$$

Gehen wir sofort von den Differentialen auf die Differenzen $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$, $\Delta i = i - i_0$, $\Delta p = p - p_0$, $\Delta t = t' - t$ über, wo Ω_0, i_0, p_0 die ungestörten der Zeit t entsprechenden, hingegen Ω, i, p die gestörten zur Zeit t' stattfindenden drei Bahnelemente bezeichnen mögen, so ist nach gehöriger Sonderung der veränderlichen von den constanten Grössen (wobei für die Rechnung selbst Ω, i, p constant gedacht werden)

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{m'k(t' - t)}{\sqrt{p(1+m)} \sin i} \int_t^{t'} Df \sin \vartheta \sin u \dots\dots\dots 1)$$

$$i = i_0 + \frac{m'k(t' - t)}{\sqrt{p(1+m)}} \int_t^{t'} Df \sin \vartheta \cos u \dots\dots\dots 2)$$

$$p = p_0 + \frac{2\sqrt{p} m'k(t' - t)}{\sqrt{1+m}} \int_t^{t'} Df \cos \vartheta \dots\dots\dots 3)$$

Die hier auftretenden bestimmten Integrale werden auf dem Wege der numerischen Integration, auch mechanische Quadratur genannt, zustande gebracht; für diese Art der Integration gibt es mehrere Methoden, von denen einige mehr, andere minder genau sind; für unsere Bedürfnisse dürfte Simpsons Regel hinreichen, worüber man in den Büchern das Betreffende nachschlage, übrigens wird auch hier wie überall die Praxis die geeignetsten Mittel und Abkürzungen des Verfahrens erfinden. Grosse Schwierigkeiten können diese Integrationen nicht machen, da die hinter dem Integralzeichen stehenden Grössen mit Hilfe klug angelegter Ephemeriden für jeden Tag leicht zu berechnen sind. Es versteht sich von selbst, dass von $f(t)$ bis $f(t')$ kein Zeichenwechsel vorkommen darf. Weil $m'k$ und auch D im allgemeinen sehr kleine Factoren sind, so werden die Störungen ganz unbedeutend sein.

Auf diese leichte und ungezwungene Weise haben wir die Störungen schon dreier Elemente ermittelt; es erübrigt noch die Störungen in der Länge des Perihels und der Excentricität zu bestimmen. Aus 2) in II. 8 haben wir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{r^2}$$

Dieser Differentialquotient drückt bekanntlich die tägliche Bewegung in der wahren Anomalie für die ungestörte Ellipse aus, dadurch aber, dass der Parameter sich ändert, wird auch diese tägliche Bewegung in etwas beeinflusst oder gestört; sehen wir dabei von den gleichzeitigen Störungen im Radiusvector ab, welche als sehr geringfügig hier ganz ausseracht kommen können, so erhalten wir vermittelst Differentiation nach dv und p

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{2r^2\sqrt{p}} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{m'k^2 Df \cos \vartheta}{r^2}$$

Die Integration der vorliegenden Differentialgleichung scheint wohl etwas schwierig zu sein; um sicher zu gehen, nehmen wir zum Infinitesimalcalcul unsere Zuflucht. In der ungestörten Bewegung war $dv = v - v'$, in der gestörten dagegen ist $dv' = v - v_1$, wo wir uns $v - v'$ und $v - v_1$ beliebig klein denken können; demnach bedeutet v' die aus den ungestörten, hingegen v_1 die aus den gestörten Elementen hervorgehende wahre Anomalie; es gehört v der gemeinschaftlichen Ausgangsepöche t , v' und v_1 der Zeit t' an, so jedoch, dass $t - t' = dt$ ein sehr kleines Zeittheilchen bedeutet; somit ist

$$dv - dv' = d^2v = (v - v') - (v - v_1) = v_1 - v'$$

die in der Zeit dt angewachsene Störung in der wahren Anomalie oder, wenn $v_1 - v' = dv$ gesetzt wird,

$$dv = \frac{m'k^2 Df \cos \vartheta}{r^2} dt^2$$

Aus dem Umstande aber, dass d^2v zu einem Differential erster Ordnung dv heruntersinkt, folgt, dass dt^2 aufzulösen ist in $dt \cdot \Delta t$, wo Δt nun beliebig ausgedehnt werden kann und vorläufig ganz willkürlich ist nicht nur in Hinsicht seiner Ausdehnung, sondern auch seines Vorzeichens; erst bei der nachfolgenden Integration erhält es beides von dt . Bedeutet nun, um zu der gewöhnlichen Bezeichnung

zurückzukehren, v_0 die aus den ungestörten Elementen berechnete, hingegen v die aus der Störung hervorgegangene wahre Anomalie, so ist zwischen den Grenzen $t' - t$

$$v = v_0 - m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \frac{Df \cos \vartheta}{r^2} \dots \dots \dots 4)$$

Der Störungsbetrag muss zuletzt noch mit $206264 \cdot 8$ multipliziert werden, um $v - v_0$ in Secunden zu erhalten; dasselbe gilt auch oben bei Ω und i . Um aber im Leser Vertrauen zu dieser eigenthümlichen Integrationsmethode, die ganz neu sein dürfte, zu erwecken, führen wir ihm eine sehr ähnliche, lehrreiche Entwicklung vor. Wenn M und M' zwei mittlere Anomalien ebendesselben Planeten bedeuten, so ist bekanntlich

$$M' - M = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{3/2}} (t' - t)$$

Statt a nehmen wir nun eine um sehr wenig verschiedene (gestörte) grosse Halbachse a' an; für ebendieselbe Zwischenzeit $t' - t$ wird sein

$$M_1 - M = \frac{k \sqrt{1+m} (t' - t)}{a'^{3/2}}$$

Mithin ist der durch diese Aenderung in a bewirkte Unterschied in der mittleren Anomalie ausgedrückt durch

$$M_1 - M' = k(t' - t) \sqrt{1+m} \cdot \frac{a^{3/2} - a'^{3/2}}{a^{3/2} a'^{3/2}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches rechts mit $a^{3/2} + a'^{3/2}$, so kommt

$$M_1 - M' = k(t' - t) \sqrt{1+m} \cdot \frac{a^3 - a'^3}{a^{3/2} a'^{3/2} (a^{3/2} + a'^{3/2})}$$

oder

$$M_1 - M' = k(t' - t) \sqrt{1+m} \cdot \frac{(a - a')(a^2 + aa' + a'^2)}{a^{3/2} a'^{3/2} (a^{3/2} + a'^{3/2})}$$

Geht man von Differenzen über zu Differentialen, so wird $M_1 - M' = -dM$, $a - a' = da$, $a = a'$, demnach

$$dM = - \frac{3k(t' - t) \sqrt{1+m} \cdot da}{2a^{5/2}}$$

Differenziert man ferner die Keplerische Gleichung

$$M = E - \sin \varphi \sin E$$

und betrachtet $e = \sin \varphi$ als constant, so kommt

$$dM = dE (1 - \sin \varphi \cos E)$$

Für 7) in II. 8 hatten wir gefunden

$$dv = \frac{\cos \varphi dE}{1 - \sin \varphi \cos E}$$

daher wird nach dieser Seite und in Hinsicht auf da

$$dM = \frac{(1 - \sin \varphi \cos E)^2}{\cos \varphi} dv = - \frac{3k(t' - t) \sqrt{1+m}}{2a^{5/2}} da$$

Aus $p = a(1 - e^2) = a \cos^2 \varphi$ folgt ferner, wenn man e als constant ansieht

$$da = \frac{dp}{\cos^2 \varphi}$$

Substituiert man dies in die frühere Gleichung, so wird

$$dv = - \frac{3k(t' - t) \sqrt{1+m} \cdot dp}{2a^2 (1 - \sin \varphi \cos E)^2 \cdot \sqrt{a} \cos \varphi}$$

Da nun $r = a(1 - \sin \varphi \cos E)$ und $\sqrt{p} = \sqrt{a} \cos \varphi$ ist, so erscheint

$$dv = - \frac{3k(t' - t) \sqrt{1+m}}{2r^2 \sqrt{p}} dp$$

Dividiert man beiderseits mit dt und substituiert für $\frac{dp}{dt}$, so erhält man

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{3m'k^2(t' - t) Df \cos \vartheta}{r^2}$$

Integriert man jetzt zwischen den Grenzen $t' - t$, so ist

$$\Delta v = - 3m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \frac{Df \cos \vartheta}{r^2}$$

Dieses Integral stimmt mit dem obigen der Form nach ganz überein, nur dass es hier dreimal so gross ist als dort; dieser Unterschied rührt daher, weil wir bei der vorstehenden Entwicklung schon für die Ausgangsepoche t den gestörten Wert a' angenommen haben, während thatsächlich dieser Wert erst am Schlusse des Intervalles, also zur Zeit t' erreicht wird; die wirkliche Störung in der wahren Anomalie beträgt nur den dritten Theil des eben entwickelten Störungswertes Δv , gerade so wie die Pyramide nur der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe und Basis ist. Man sieht jetzt deutlich, mit welchem Rechte wir oben d^2v in dv und dt^2 in $\Delta t \cdot dt$ übergehen lassen konnten, und dass überhaupt die obige Integrationsmethode, obwohl gewiss merkwürdig, doch in aller Strenge richtig ist; wir werden noch einigemale davon Gebrauch machen, obwohl wir in den kommenden Fällen nicht mehr imstande sein werden, eine ähnliche parallele Entwicklung wie hier beizubringen.

Für die Berechnung des Argumentes der Breite nach der bekannten Formel

$$u = \pi + v - \Omega = \pi + v_0 + \Delta v - \Omega_0 - \Delta \Omega$$

ist es aber gleichgiltig, ob ich die Störung Δv an die wahre Anomalie v_0 anbringe oder dieselbe zur Länge des Perihels hinzuschlage; thue ich das letztere, so kann Δv auch als die Aenderung des Perihels angesehen werden. Nehme ich aber das Perihel als beweglich an, wie dies in den Planetentabellen und sonstigen astronomischen Werken geschieht, so fallen dann natürlich die Störungen in v ganz weg, da man statt Δv nun $\Delta \pi$ setzen kann.

Jetzt sind wir schon imstande, mit Benützung der Formeln 4) und 5) in II. 9 die heliocentrische Länge und Breite des gestörten Planeten oder Kometen zu rechnen; um nun auch die geocentrische Position aus 6), 7), 8) daselbst bestimmen zu können, so müssen wir noch die Störung im Radiusvector r ermitteln. Zu diesem Ende betrachten wir den in III. 7 (Seite 72) entwickelten Differentialquotienten

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k \sqrt{1+m} \sin q \sin v}{\sqrt{p}}$$

etwas genauer; derselbe drückt, wie wir wissen, die tägliche Aenderung des Radiusvector in der ungestörten Bewegung, und zwar für den Ort, wo die wahre Anomalie des Planeten oder Kometen v beträgt, aus. Infolge der Störung im Parameter gestaltet sich aber diese

tägliche Bewegung an der betreffenden Stelle etwas anders. Betrachten wir daher v einen Augenblick als constant und differenzieren hier nach dr und p , so ergibt sich, wenn wir dann mit dt dividieren und für $\frac{dp}{dt}$ substituieren,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{k\sqrt{1+m} \sin \varphi \sin v}{2p\sqrt{p}} \cdot \frac{dp}{dt} = - \frac{m'k^2 Df \sin \varphi \sin v \cos \vartheta}{p}$$

Vermittelst ganz ähnlicher Erwägungen wie früher bei der Ermittlung der Störung in der wahren Anomalie gelangen wir hier zum Integral

$$r = r_0 + \frac{m'k^2(t' - t)^2 \sin \varphi}{p} \int_t^{t'} Df \sin v \cos \vartheta \quad \dots \dots 5)$$

wo r_0 den ungestörten, r den gestörten Radiusvector bezeichnet. Die gestörten rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ergeben sich jetzt aus den Ausdrücken in I. 3; aus der Gleichung

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

erhält man sofort die Excentricität der neuen Ellipse; die grosse Halbachse aus $p = a \cos^2 \varphi$ und die mittlere tägliche Bewegung aus

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$$

womit die Störungsrechnung als abgeschlossen betrachtet werden kann. Wie aus den betreffenden Ausdrücken zu ersehen ist, bleiben die Störungswerte überall ausserordentlich klein, dieselben werden wohl eine Zeitlang zunehmen, aber dann wieder zu den alten Zuständen zurückkehren, und wo eine stetige Zu- oder Abnahme sich herausstellen sollte, kann dieselbe höchstens nur eine Verschiebung der Knoten und Apsidenpunkte bedingen, was aber für den Bestand des ganzen Sonnensystems belanglos ist.

3.

Wir kehren jetzt zu den Differentialgleichungen 3) und 4) in Art. 1 zurück und versuchen dieselben nach der eben vorgetragenen Methode direct zu integrieren. Ehe wir aber dies thun können, müssen wir den in d^3s, d^3x, d^3y, d^3z enthaltenen Störungen eine andere

unseren Zwecken geeignetere Form geben. Wie früher, so nehmen wir auch hier den Infinitesimalcalcul in Anspruch; demzufolge setzen wir für zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gleiche, und zwar sehr kleine Zeitintervalle dt in der ungestörten Bewegung $ds = \sigma - \sigma'$, $ds' = \sigma' - \sigma''$, wobei wir uns der gemachten Voraussetzung zufolge diese beiden Strecken ausserordentlich klein denken müssen; in der gestörten Bewegung hingegen sei, wenn wir von ebendemselben Curvenpunkt σ ausgehen, $d,s = \sigma - \sigma_,$, $d,s' = \sigma_ - \sigma_$; die beiden Curven, von deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkt σ aus wir nach beiden Richtungen je zwei kleine Strecken abgeschnitten haben, müssen wir uns wegen der geringen Störungen nahe nebeneinanderlaufend denken. Folglich wird in der ungestörten Bewegung

$$ds - ds' = d^2s = (\sigma - \sigma') - (\sigma' - \sigma'')$$

in der gestörten hingegen

$$d,s - d,s' = d^2s' = (\sigma - \sigma_) - (\sigma_ - \sigma_)$$

Daher vermittelst Subtraction

$$d^2s - d^2s' = d^3s = [(\sigma - \sigma') - (\sigma - \sigma_)] - [(\sigma' - \sigma'') - (\sigma_ - \sigma_)]$$

oder

$$d^3s = (\sigma_ - \sigma') + (\sigma_ - \sigma') - (\sigma_ - \sigma'')$$

Dem Gesagten zufolge ist $(\sigma_ - \sigma')$ der Störungsbetrag am Ende des ersten und $\sigma_ - \sigma''$ derselbe am Ende des zweiten gleichen Zeittheilchens dt . Wir setzen nun $\sigma_ - \sigma' = d\zeta$, so ist nach den Grundsätzen der Differentialrechnung $(\sigma_ - \sigma') - (\sigma_ - \sigma'') = d^2\zeta$ und wir erhalten

$$d^3s = d\zeta + d^2\zeta$$

Die Gleichung 3) im Art. 1 übergeht daher in die folgende

$$\frac{d\zeta + d^2\zeta}{dt^2} = - m'k^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Nach ebenfalls bekannten Gesetzen der Differentialrechnung verschwindet aber ein Differential zweiter Ordnung gegen dasjenige der ersten, welches letztere, weil selbst unendlich klein, einer noch kleineren Grösse neben sich keinen Raum gibt; demnach ist

$$d\zeta = - m'k^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2} \right) dt^2 \dots \dots \dots \alpha)$$

Gehen wir jetzt von Differentialen auf Differenzen über und integrieren nach der oben dargelegten Methode, so wird

$$\Delta s = m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r'^2} \right)$$

Bezeichnet man dann mit s_0 die Sehne, welche den Anfangsort mit dem ungestörten Endort verbindet, und mit s die Sehne, welche den Anfangsort mit dem gestörten, also scheinbaren Endort verbindet, so ist

$$s = s_0 + \Delta s$$

Die Sehnen werden demnach verkürzt, so lange $r, < \varrho$ ist, im entgegengesetzten Falle verlängert.

Vermittelst ähnlicher Betrachtungen und Deductionen, wie wir sie bei der Umformung von d^3s gemacht haben, lassen sich jetzt auch d^3x , d^3y , d^3z in 4) Art. 1 überführen in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, wenn wir mit den letzteren Grössen die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten bezeichnen wollen; wir bekommen demzufolge

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= - m'k^2 \left(\frac{x, - x}{\varrho^3} - \frac{x,}{r'^3} \right) dt^2 \\ d\eta &= - m'k^2 \left(\frac{y, - y}{\varrho^3} - \frac{y,}{r'^3} \right) dt^2 \\ d\zeta &= - m'k^2 \left(\frac{z, - z}{\varrho^3} - \frac{z,}{r'^3} \right) dt^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \beta)$$

Sind dann x , y , z die gestörten, x_0 , y_0 , z_0 die ungestörten rechtwinkligen Coordinaten des Endortes, so gibt die Integration der vorstehenden drei Gleichungen

$$x = x_0 + \Delta \xi = x_0 + m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \left(\frac{x, - x}{\varrho^3} - \frac{x,}{r'^3} \right)$$

$$y = y_0 + \Delta \eta = y_0 + m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \left(\frac{y, - y}{\varrho^3} - \frac{y,}{r'^3} \right)$$

$$z = z_0 + \Delta \zeta = z_0 + m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \left(\frac{z, - z}{\varrho^3} - \frac{z,}{r'^3} \right)$$

Der gestörte Radiusvector ergibt sich dann aus

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Die Störung im Radiusvector kann aber auch direct bestimmt werden; differenziert man nämlich die vorstehende Gleichung und gibt dem Differentiale dr die Bedeutung der Störung und setzt demzufolge $dx = d\xi$, $dy = d\eta$, $dz = d\zeta$, so ist

$$r dr = x d\xi + y d\eta + z d\zeta$$

Multipliziert man dann in β) die erste Gleichung mit x , die zweite mit y , die dritte mit z , so ergibt sich vermittelst Addition und einer kleinen Reduction auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen und wenn zugleich dt^2 in $dt \cdot \Delta t$ aufgelöst wird

$$x \frac{d\xi}{dt} + y \frac{d\eta}{dt} + z \frac{d\zeta}{dt} = - m' k^2 \left[(xx, + yy, + zz,) D - \frac{r^2}{\varrho^3} \right] \Delta t$$

Nun ist

$$rr, \cos V = xx, + yy, + zz,$$

Mit Zuziehung dieser Hilfe wird dann

$$r \frac{dr}{dt} = - m' k^2 \left(Dr, \cos V - \frac{r^2}{\varrho^3} \right) \Delta t$$

Dividirt man beiderseits mit r und integriert, so ist

$$r = r_0 + \Delta r = r_0 + m' k^2 (t' - t)^2 \int_t^{t'} \left(Dr, \cos V - \frac{r}{\varrho^3} \right)$$

Aus E) im vorangehenden Artikel folgt

$$\cos V = \frac{r^2 + r_1^2 - \varrho^2}{2rr_1}$$

Substituiert man diesen letzteren Ausdruck für $\cos V$ hinter dem Integralzeichen, so kommt nach einer kurzen Operation identisch

$$Dr, \cos V - \frac{r}{\varrho^3} = \frac{1}{2r} \left(\frac{r_1^2 - \varrho^2 - r^2}{\varrho^3} + \frac{\varrho^2 - r^2 - r_1^2}{r_1^3} \right)$$

Nun ist nach dem früheren $\varrho^2 - r^2 - r_1^2 = - 2rr_1 \cos V$.

Es sei ferner in dem erwähnten Raumdreiecke der Winkel am gestörten Körper G , so ist analog $r'^2 - \varrho^2 - r^2 = -2\varrho r \cos G$, demzufolge wird identisch

$$Dr, \cos V - \frac{r}{\varrho^3} = - \left(\frac{\cos G}{\varrho^2} + \frac{\cos V}{r'^2} \right)$$

daher auch

$$r = r_0 + \Delta r = r_0 - m'k^2(t' - t)^2 \int_t^{t'} \left(\frac{\cos G}{\varrho^2} + \frac{\cos V}{r'^2} \right)$$

Berechnet man jetzt in dem Dreiecke: Sonne, Anfangsort t und Endort t' des gestörten Planeten oder Kometen den an der Sonne liegenden Winkel, und zwar das einmal mit den ungestörten Seiten R, r_0, s_0 , das anderemal mit R und den gestörten Seiten r, s , so gibt der Unterschied beider Winkel offenbar Δv , die Störung in der wahren Anomalie; ein kürzeres Verfahren liegt in der Differentialrechnung, demgemäss sei

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(v' - v)$$

wo wir mit R den Radiusvector des Anfangsortes t bezeichnen, derselbe bleibt natürlich ungestört; $v' - v$ ist der Winkel an der Sonne, v gehört der Zeit t , v' der Zeit t' an. Die Differentiation gibt

$$s ds = r dr - R \cos(v' - v) dr + Rr \sin(v' - v) dv'$$

oder

$$dv' = \frac{s ds - [r - R \cos(v' - v)] dr}{Rr \sin(v' - v)}$$

Bezeichnet man mit α den der Seite R gegenüberliegenden Winkel, so ist

$$R \sin(v' - v) = s \sin \alpha, \quad r - R \cos(v' - v) = s \cos \alpha$$

somit ist

$$dv' = \frac{ds - \cos \alpha dr}{r \sin \alpha}$$

Substituiert man hierin ds und dr durch die oben gefundenen Werte, so erhält man dv' , die Störung in der wahren Anomalie.

Von da weiter vorzudringen scheint nicht rätlich, ist aber auch nicht nothwendig, da unsere Störungstheorie ohnehin geleistet hat, was man von ihr nur verlangen kann; sie bietet auch hin-

längliche Controle, daher ihr an Vollständigkeit nichts gebricht. Die Entwicklungen in diesem und dem vorangehenden Artikel ergänzen sich gegenseitig; denn obwohl der Art. 2 als ein abgeschlossenes Ganzes betrachtet werden darf, so fehlt ihm dennoch die directe Ableitung der Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten, welche erst hier gegeben wird, und zwar als eine sehr erwünschte Zugabe. Es ist nicht zu erwarten, dass die Störungen im Radiusvector und in der wahren Anomalie nach beiden Seiten hin die genaueste Uebereinstimmung liefern werden, aber die Forderungen, welche die Praxis stellt, müssen beide in gleicher Weise erfüllen.

Die directe Herleitung der Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten, wie sie in diesem Artikel durchgeführt wurde, hat aber noch eine andere Seite von nicht zu unterschätzendem Nutzen. Will man nämlich bei einer Bahnbestimmung genau vorgehen, so muss man gewiss auch auf die Störungen, die der Himmelskörper von den bedeutenderen und nahen Planeten in der Zwischenzeit der Beobachtungen erfährt, Rücksicht nehmen; um dies thun zu können, ist natürlich eine Kenntniss genäherter Bahnelemente nothwendig, denn die Störungen sind, wie gesagt, sämmtlich so klein, dass sie mit nur näherungsweise richtigen Daten hinlänglich scharf berechnet werden können. Es wäre aber sehr umständlich, wollte man diese Störungen nach der in Art. 2 entwickelten Methode ermitteln, dazu ist die in diesem Artikel gegebene Methode wie geschaffen; hat man aber einmal die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten, welche Störungen wir hier mit dx , dy , dz bezeichnen wollen, berechnet, so ergeben sich die Correctionen, die man an die Beobachtungen anzubringen hat, auf eine leichte Weise. Es sei allgemein

$$x = r \cos b \cos l$$

$$y = r \cos b \sin l$$

$$z = r \sin b$$

Differenzieren wir auf beiden Seiten vom Gleichheitszeichen und nehmen sämmtliche Grössen als veränderlich an, so kommt

$$dx = \cos b \cos l \, dr - r \sin b \cos l \, db - r \cos b \sin l \, dl$$

$$dy = \cos b \sin l \, dr - r \sin b \sin l \, db + r \cos b \cos l \, dl$$

$$dz = \sin b \, dr + r \cos b \, db$$

Multiplizieren wir die erste Zeile mit $\sin l$, die zweite mit $\cos l$, so ergibt sich vermittelst Subtraction

$$\cos l \, dy - \sin l \, dx = r \cos b \, dl \quad \dots \dots \dots A)$$

Multiplizieren wir hingegen die erste Zeile mit $\cos l$, die zweite mit $\sin l$, so kommt mittelst Addition

$$\sin l \, dy + \cos l \, dx = \cos b \, dr - r \sin b \, db$$

Multiplizieren wir jetzt die dritte Zeile mit $\cos b$ und die vorstehende Gleichung mit $\sin b$, so kommt mittelst Subtraction

$$\cos b \, dz - \sin b \sin l \, dy - \sin b \cos l \, dx = r \, db \quad B)$$

Multiplizieren wir hingegen die dritte Zeile mit $\sin b$ und die erwähnte Gleichung mit $\cos b$, so kommt mittelst Addition

$$\sin b \, dz + \cos b \sin l \, dy + \cos b \cos l \, dx = dr \quad C)$$

Die Gleichungen A), B), C) geben die Störungswerte dl , db , dr ; diese Formeln genügen für die Berechnung der Störungen, welche die Erde durch die Planeten erfährt und ebenso auch für die Störungen des Mondes durch die Sonne und die Planeten; um aber bei den Planeten die geocentrischen Beobachtungen in dieser Hinsicht corrigieren und auf ein bestimmtes Datum reducieren zu können, dazu dienen dann noch die Differentialformeln für $d\lambda$ und $d\beta$ am Schlusse von II. 9.

Bei der Berechnung der Störungen, die der Mond durch die Sonne erfährt, setze man in den Formeln durchgehends die Sonnenmasse

$$m' = 1, \quad \lg k = 2.1195135 \text{ in Bogenmass,} \\ \lg k = 7.4339386 \text{ in Secunden.}$$

Damit hiebei die Massenverhältnisse gewahrt bleiben, ersetze man $1 + m$ überall durch $m + m = \frac{1}{327910}$; es versteht sich von selbst, dass alle vorkommenden Distanzen, also auch ϱ und r , in Einheiten von a' , d. i. der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde, auszudrücken sind. (Sieh die Anmerkungen zu II. 7.)

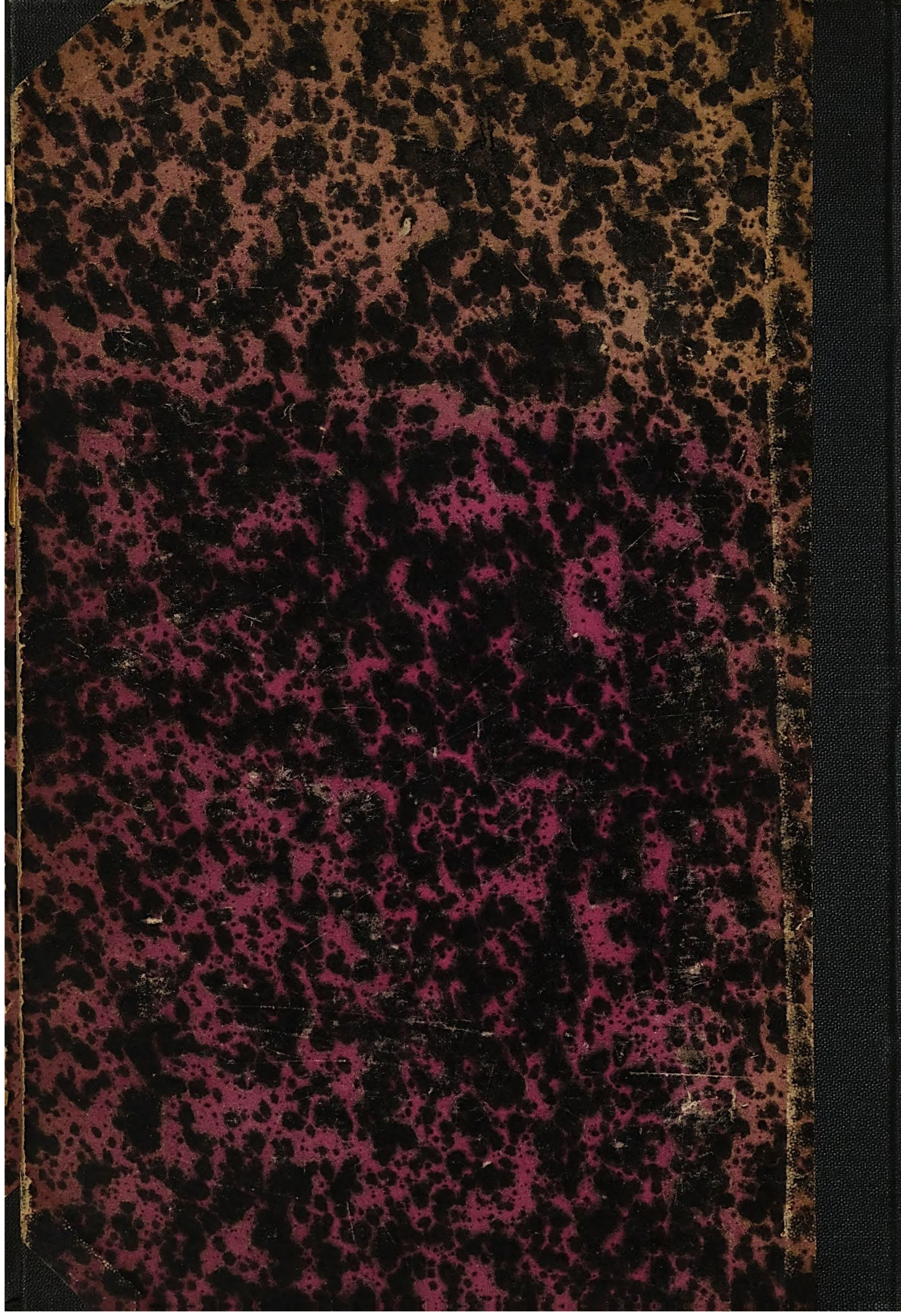
Setzt man aber die Erdmasse $= 1$, so wird $m' = 332000$, die Masse der Sonne als des störenden Körpers; an die Stelle von k tritt dann k_e die Anziehungskraft der Erde:

$$\lg k_e = 9.3589641 - 10 \text{ in Bogenmass,} \\ \lg k_e = 4.6733892 \text{ in Secunden.}$$

$m = \frac{1}{80}$ ist die Mondmasse im Verhältnisse zur Erde; die Distanzen sind wie früher alle in Einheiten von a' auszudrücken. Nach diesen Vorschriften wird man auch die Störungen des Mondes durch einen Planeten berechnen können.

Die bedeutenden numerischen Coëfficienten, die hier vor dem Integralzeichen auftreten, geben zu erkennen, dass die Störungen des Mondes durch die Sonne nicht unerheblich sind; dieselben würden auch zu einer bedenklichen Höhe anwachsen, wenn nicht die hinter dem Integralzeichen stehenden Factoren stets äusserst klein blieben. Weil nämlich ϱ und r , nicht nur immer wenig verschieden sind, sondern auch stets einen sehr kleinen Winkel einschliessen, so wird f sowohl als auch D immer klein bleiben; dadurch werden jene Coëfficienten ziemlich herabgedrückt erscheinen. Wegen der schnellen Bewegung und kurzen Umlaufszeit des Mondes muss das Zeitintervall $t' - t$ in enge Grenzen eingeschlossen werden. Andererseits lässt sich aber auch mit Recht erwarten, dass man umgekehrt aus den beobachteten Störungen des Mondes durch die Sonne die erwähnten Coëfficienten etwas genauer wird bestimmen können, als sie bisher angenommen wurden.





Vodušek, Matthaeus

Neue exacte Methode für die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen nebst
einer neuen Störungstheorie Von Matthäus Vodušek

Laibach 1883

Bamberg, Staatsbibliothek -- Astr.o.110-m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11830883-6